



Versuch

eines

vollkommen consequenten

Systems der Mathematik,

von

Dr. Martin Ohm,

Professor an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie und an der Königl. allgemeinen Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Vierter Theil,

Differenzial- und Integral-Rechnung enthaltend.

Mit einer Figurentafel

und mit

vielen erläuternden und Uebungs-Beispielen, so wie mit 54 Integraltafeln versehen.

Nürnberg, 1830.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Lehrbuch

der

höhern Analysis,

von

Dr. Martin Ohm,

Professor an der Königl. Universität, an der Königl. Bau-Akademie und an der Königl. allgemeinen Kriegsschule zu Berlin; der Kaiserl. Russischen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, so wie mehrer andern gelehrten Gesellschaften korrespond. Mitglied.

Zweiter Theil,

Differenzial- und Integral-Rechnung enthaltend.

Mit einer Figurentafel

und mit

vielen erläuternden und Uebungs-Beispielen, so wie mit 54 Integraltafeln versehen.

Nürnberg, 1830.

Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung.

Inhalts-Verzeichniß des vierten Theils.

Viertes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Achtes Kapitel.

Anhang.

Differenzial- und Integral-Rechnung.

Inhalts-Verzeichniß des vierten Theils.

Viertes Kapitel.

Sechstes Kapitel.

Siebentes Kapitel.

Achtes Kapitel.

Anhang.

Differenzial- und Integral-Rechnung.



Höhere Zahlenlehre.

Viertes Kapitel.

Was bei den direkten Entwicklungen in Reihen noch zu erinnern ist. Wie aus den gegebenen Reihen für F_{x+h}, auf die Ableitungen $\partial^r F_x$ geschlossen werden kann, sowohl im allgemeinen, als auch für besondere Werthe von x.

Vorerinnerung.

Nach dem ersten Kapitel ist der Taylor'sche Lehrsatz (oder der Maclaurin'sche, denn aus jedem derselben geht der andere sogleich hervor) das Ziel und der Zweck der Ableitungsrechnung; und die Aufstellung der Beziehungen zwischen den Koeffizienten einer und derselben Taylor'schen Reihe zu einander, oder zwischen denen mehrer solcher Reihen, wie solche Gegenstand der zwei folgenden Kapitel gewesen ist, war eine von der Erreichung dieses Zweckes unzertrennliche Folge. — Das gegenwärtige Kapitel hat daher noch das hinzustellen, was zur Vervollständigung dieses Hauptzweckes wünschenswerth seyn muß, namentlich auch anzugeben, wie weit in den (§. 7.) berührten Ausnahmsfällen die Ableitungsrechnug noch mit Erfolg angewandt werden kann, und welche andere Mittel gebraucht werden, wenn man sich der Ableitungsrechnung zur direkten Entwicklung in Reihen nicht mehr bedienen kann oder will.

§. 96. Aufgabe.

Es ist y_x eine Funktion von x; man soll $\partial^n y_x$ direkt finden, ohne die frühern Ableitungen dazu nöthig zu haben.

Auflösung und Beweis.

Da $y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right]$ oder $= S\left[\frac{d^a y}{dx^a} \cdot \frac{h^a}{a!}\right]$

ist, so verwandle man y_{x+h} direkt und ohne den Taylor'schen Satz anzuwenden in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende unendliche Reihe, welche etwa

$$= S[P_a \cdot h^a] \qquad \text{seyn mag,}$$

und bringe sie auf die Form

$$S\left[a! P_a \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

so ist nothwendig

$$\partial^n y_x \quad \text{oder} \quad \frac{d^n y}{dx^n} = n! P_n;$$

d. h. die nte Ableitung $\partial^n y_x$ (oder den nten Differenzial-Koeffizienten $\frac{d^n y}{dx^n}$) findet man, wenn man den Koeffizienten P_n der Potenz h^n in der Entwicklung von y_{x+h}, mit n! noch multiplizirt.

Beispiel. Es sey $y_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

so ist

$$y_{x+h} = [1-(x+h)^2]^{-\frac{1}{2}} = [(1-x^2) - 2x \cdot h - h^2]^{-\frac{1}{2}},$$

also nach dem binomischen oder trinomischen Lehrsatze (II. Th. §§. 404. und 685.)

$$y_{x+h} = S\left[\frac{(-\frac{1}{2})^{b+c|-1}}{b!\, c!} \cdot (-1)^{b+c} \cdot 2^b \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-b-c} \cdot x^b \cdot h^{b+2c}\right];$$

oder weil nach (II. Th. §. 340. N. 5.)

$$\frac{(-\frac{1}{2})^{b+c|-1}}{b!\,c!}\cdot(-1)^{b+c} = \frac{\frac{1}{2}^{b+c|+1}}{b!\,c!} = \frac{1^{b+c|2}}{2^{b+c}\cdot b!\,c!}$$ ist,

$$y_{x+h} = S\left[\frac{1^{b+c|2}}{2^c\cdot b!\,c!}\cdot\frac{x^b}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+b+c}}\cdot h^{b+2c}\right].$$

Folglich nach unserem (§. 96.) und weil noch $2^c\cdot c! = 2^{c|2}$ ist:

$$d^n y_x = n!\times S\left[\frac{1^{b+c|2}}{2^{c|2}\cdot b!}\cdot\frac{x^b}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+b+c}}\right]_{b+2c=n}.\text{*)}$$

Wollte man z. B. $\partial^5 y_x$ d. h. $\frac{d^5 y}{dx^5}$ entwickelt haben, so hätte man die Gleichung

$$b+2c = 5,$$

also für b, c, die Werthe

c	0	1	2
b	5	3	1,

folglich würde $\partial^5 y_x$ aus 3 Gliedern bestehen, nämlich

$\partial^5 y_x =$

$$= \left[1^{5|2}\cdot\frac{x^5}{(1-x^2)^5} + 10\cdot 1^{4|2}\cdot\frac{x^3}{(1-x^2)^4} + 15\cdot 1^{3|2}\cdot\frac{x}{(1-x^2)^3}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Beispiel 2. Ist

$$z = \overset{1}{Sin}\,x\text{ **)},\quad \text{d. h. } Sin\,z = x,$$

so ist $$\partial z_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo $\sqrt{1-x^2}$ ihren positiven oder ihren negativen Werth vorstellt, je

---

*) Man kann auch mit n! d. h. (b+2c)! inwendig unter das Summenzeichen hinein multipliziren, und erhält dann, weil

$$\frac{n!}{b!} = \frac{(b+2c)!}{b!} = (b+1)^{2c|+1} = n^{2c|-1}$$ ist,

$$\partial^n y_x = S\left[\frac{1^{b+c|2}}{2^{c|2}}\cdot n^{2c|-1}\cdot\frac{x^b}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+b+c}}\right]_{b+2c=n}.$$

**) D. h. $z = arc\cdot Sin\,x = ang\,(Sin = x)$.

Beispiel 3. Wir wollen als letztes Beispiel den allgemeinen Fall nehmen, wo

$$u = (a+bx+cx^2)^p$$

ist, und wo nun $\partial^n u$ direkt gefunden werden soll.

Weil aber

$$a+b(x+h)+c(x+h)^2 = (a+bx+cx^2)+(b+2cx)h+ch^2$$

ist, so hat man nach dem trinomischen Lehrsatze,

wenn $a+bx+cx^2 = f$, $b+2cx = g$ gesetzt wird,

$$u_{x+h} = S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot f^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}} \cdot g^{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{b}} \cdot h^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}}\right],$$

also nach unserem (§.)

$$\partial^n u_x = n! \times S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot (a+bx+cx^2)^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}} \cdot (b+2cx)^{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}=n}.$$

Sollte der Werth dieses $\partial^n u_x$ für $x = 0$ gefunden werden, so erhielte man

$$\left(\partial^n u_x\right)_0 = n! S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot a^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}} \cdot b^{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}=n}.$$

Gesetzt es wäre $\frac{1}{Tg}x$ in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, so hätte man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatz

---

$$Cos\left[2c\pi \pm (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)\right] = x$$

ist, dann auch $Sin\,\varphi = x$ seyn werde; daß mithin

$$\frac{1}{Cos}x = 2c\pi \pm (\tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{Sin}x)$$

ist, wo statt c, jede positive und auch jede negative ganze Zahl und auch 0, statt $\frac{1}{Sin}x$ aber einer der Werthe und zwar der durch die Reihe

$$\frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \cdots$$

vorgestellte gesetzt werden muß, indem man dabei sowohl $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{Sin}x$ addirt als subtrahirt, wenn man alle Werthe von $\frac{1}{Cos}x$ haben will.

$$\frac{1}{Tg}x = S\left[\left(\partial^c \frac{1}{Tg}x\right)_0 \cdot \frac{x^c}{c!}\right]$$

die Ableitungen nach x genommen; dabei ist aber

$$\left(\partial^0 \frac{1}{Tg}x\right)_0 = \left(\frac{1}{Tg}x\right)_0 = \pm \mathfrak{d}\pi,$$

und

$$\partial \frac{1}{Tg}x = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1};$$

also, wenn c irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \partial^{c-1}\left[(1+x^2)^{-1}\right].$$

Weil aber $(1+x^2)^{-1}$ der besondere Fall des obigen u ist, in welchem $p = -1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, so hat man nach dem oben gefundenen Resultat:

$$\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \partial^{c-1}\left[(1+x^2)^{-1}\right]_x$$

$$= S\left[\frac{(-1)^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\ \mathfrak{b}!} \cdot (c-1)!\ (1+x^2)^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}} (2x)^{\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b} = c-1}.$$

Und da für $x = 0$, $(2x)^{\mathfrak{a}}$ allemal 0 wird, so oft $\mathfrak{a}$ nicht 0 ist, so hat für $x = 0$, $\mathfrak{a}$ bloß den Werth 0, und es ist also für $x = 0$, $\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right)$ selbst gleich 0, so oft $c-1$ eine ungerade Zahl, also c eine gerade Zahl ist, weil die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}+2\mathfrak{b} = c-1$, dann $\mathfrak{a} = 0$ nicht werden läßt. Ist aber c eine ungerade Zahl, so ist $\mathfrak{a} = 0$, $2\mathfrak{b} = c-1$ oder $c = 2\mathfrak{b}+1$, also, weil $(-1)^{\mathfrak{b}|-1} = (-1)^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{b}!$ ist, für $x = 0$, wo $\mathfrak{a} = 0$ ist,

$$\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \partial^{2\mathfrak{b}+1}\left(\frac{1}{Tg}x\right) = S\left[(-1)^{\mathfrak{b}} \cdot (2\mathfrak{b})!\right];$$

also nach dem Maclaurin'schen Satze

$$\frac{1}{Tg}x = \pm \mathfrak{d}\pi + S\left[(-1)^{\mathfrak{b}} \cdot (2\mathfrak{b})!\, \frac{x^{2\mathfrak{b}+1}}{(2\mathfrak{b}+1)!}\right]$$

oder

$$\frac{1}{Tg}x = \pm \mathfrak{d}\pi + S\left[(-1)^{\mathfrak{b}} \cdot \frac{x^{2\mathfrak{b}+1}}{2\mathfrak{b}+1}\right],$$

gerade wie dieses im zweiten Theile dieses Systems (§. 669.) gefunden worden ist.

Anmerkung. In dem Beispiel (3.) ist aber das Beispiel (1.) als ein besonderer Fall enthalten, wenn $p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$ gesetzt wird.

Uebrigens kann dieses allgemeinere Beispiel (3.) auch noch so umgeformt werden. Man hat, wenn $a + bx + cx^2 = f$ und $b + 2cx = \partial f = g$ gesetzt wird,

$$f_{x+h} = f \cdot (1 + \frac{g}{f} \cdot h + \frac{c}{f} \cdot h^2) = f \cdot \left[(1 + \frac{g}{2f} h)^2 + \frac{4cf - g^2}{4f^2} \cdot h^2\right];$$

folglich, weil $4cf - g^2 = 4ac - b^2$ ist, nach dem binom. Lehrsatz:

$$u_{x+h} = (f_{x+h})^p = f^p \cdot \left[(1 + \frac{g}{2f} \cdot h)^2 + \frac{4ac - b^2}{4f^2} \cdot h^2\right]^p$$

$$= f^p \cdot S\left[\frac{p^{a|-1}}{a!} \cdot (1 + \frac{g}{2f} \cdot h)^{2p-2a} \cdot \frac{(4ac - b^2)^a}{4^a \cdot f^{2a}} \cdot h^{2a}\right],$$

während wiederum nach demselben binomischen Lehrsatze

$$(1 + \frac{g}{2f} h)^{2p-2a} = S\left[\frac{(2p - 2a)^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{g^b}{2^b \cdot f^b} \cdot h^b\right]$$

seyn wird, so daß, diese Reihe in vorige Gleichung substituirend,

$$u_{x+h} = f^p \cdot S\left[\frac{p^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2p - 2a)^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{g^b \cdot (4ac - b^2)^a}{2^{b+2a} \cdot f^{2a+b}} \cdot h^{2a+b}\right],$$

also nach unserm (§.)

$$\partial^n u_x = \frac{n!\, f^p}{2^n \cdot f^n} \times S\left[\frac{p^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2p - 2a)^{b|-1}}{b!} \cdot (4ac - b^2)^a \cdot g^b\right]_{2a+b=n},$$

oder, wenn man $n - 2a$ statt b setzt, (weil

$$n! \frac{(2p - 2a)^{n-2a|-1}}{(n - 2a)!} = n^{2a|-1} \cdot (2p - 2a)^{n-2a|-1}$$

$$= (2p)^{n|-1} \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(2p)^{2a|-1}} \quad \text{ist}),$$

$$\partial^n u_x = (2p)^{n|-1} \cdot (\tfrac{1}{2} g)^n f^{p-n} \cdot S\left[p_a \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(2p)^{2a|-1}} \cdot \frac{(4ac - b^2)^a}{g^{2a}}\right]$$

wird.

Wendet man dies auf $\partial^n\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$ an, so hat man

$p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $g = -2x$,

$$\left(\frac{4ac-b^2}{g^2}\right)^a = \left(\frac{-4}{+4x^2}\right)^a = \left(-\frac{1}{x^2}\right)^a = (-1)^a \cdot \frac{1}{x^{2a}};$$

und weil noch überdies jetzt

$$(2p)^{n|-1} \cdot (-1)^n = (-1)^{n|-1} \cdot (-1)^n = 1^{n|1} = n!,$$

$$\frac{(-\frac{1}{2})^{a|-1} \cdot (-1)^a}{a!} = \frac{1^{a|2}}{2^{a|2}},$$

so wie

$$\frac{p^{a|-1} \cdot (-1)^a}{a!} \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(2p)^{2a|-1}} = \frac{1^{a|2}}{2^{a|2}} \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(-1)^{2a|-1}} = \frac{1^{a|2}}{2^{a|2}} \cdot n_{2a}$$

wird (in so ferne $(-1)^{2a|-1} = 1^{2a|1} = (2a)!$ ist), so findet sich nun

$$\partial^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{n!}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \cdot S\left[\frac{1^{a|2}}{2^{a|2}} \cdot n_{2a} \cdot \frac{1}{x^{2a}}\right],$$

welche Form des Resultats jedoch nicht sehr geeignet ist, den Werth dieser $n$ten Ableitung für $x = 0$ zu geben, wie solcher im Verlaufe des Beispiels (1.) verlangt worden war.

§. 97. Zusatz.

Ist $f = y \cdot z$, und sind y und z selber wieder Funktionen von x, nämlich y_x und z_x, so wird $\partial^n f_{(x)}$ d. h. $\partial^n(yz)_x$ oder $\frac{d^n(yz)}{dx^n}$ nun auf demselben, (§. 96.) beschriebenen Wege gefunden.

Es wird aber jetzt

$$y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

$$z_{x+h} = S\left[\partial^b z_x \cdot \frac{h^b}{b!}\right];$$

also

$$f_{(x+h)} = y_{x+h} \cdot z_{x+h} = S\left[\partial^a y \cdot \partial^b z \cdot \frac{h^{a+b}}{a!\, b!}\right];$$

und demnach (nach §. 96.)

$$\partial^n f_{(x)} = n!\, S\left[\frac{\partial^a y_x \cdot \partial^b z_x}{a!\, b!}\right]_{a+b=n},$$

d. h.

$$\partial^n(yz)_x = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!}\cdot\partial^a y_x\cdot\partial^b z_x\right]_{a+b=n},$$

oder, wenn man links und rechts mit dx^n d. h. mit dx^{a+b} multiplizirt, um Differenzialrechnungs-Form zu bekommen,

$$d^n(yz) = S\left[\frac{(a+b)!}{a!\ b!}\cdot d^a y\cdot d^b z\right]_{a+b=n},$$

wo man nicht übersehen muß, daß nach (II. Th. §. 402.) $\frac{(a+b)!}{a!\ b!}$ mit der Bedingung $a+b=n$, die einzelnen Binomial-Koeffizienten sind von $(a+b)^n$; so daß, auf die gewöhnliche Weise geschrieben, weil $\partial^0 y = y$ und $\partial^0 z = z$,

$$\begin{aligned}\partial^n(yz) = z\cdot\partial^n y + n\cdot\partial^{n-1}y\cdot\partial z + n_2\cdot\partial^{n-2}y\cdot\partial^2 z + n_3\cdot\partial^{n-3}y\cdot\partial^3 z + \cdots\\ + n_2\cdot\partial^2 y\cdot\partial^{n-2}z + n\cdot\partial y\cdot\partial^{n-1}z + y\cdot\partial^n z\end{aligned}$$

ist, wo die Ableitungen nach allem x genommen sind, wo man aber statt aller ∂ auch d setzen darf, um denselben Satz in Differenzialrechnungs-Form zu haben; während in letzterem Falle dy und dz zugleich veränderlich gedacht sind, d. h. wo y und z Funktionen irgend eines neuen Veränderlichen x sind, welcher um dx wächst, so daß y, z, dy, dz, d^2y, d^2z, 2c. immer auf's neue wachsen, so oft auf's neue x um dx wachsend gedacht wird.

Anmerkung 1. Es ist aber dieser Satz bereits im (II. Th. §. 447.) für ganze Funktionen hingestellt worden, während er hier für jede Gattung der Funktionen gilt. Der dort für ganze Funktionen angedeutete Beweis konnte aber auch hier für den allgemeinern Satz wiederholt werden. Doch haben wir hier vorgezogen den analytischen, aber nicht den Weg der Induktion zu betreten.

Anmerkung 2. Gesetzt man wollte $y = Tg\,x$ in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe verwandeln, so hätte man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze

$$y = Tg\,x = S\left[(\partial^a y_x)_0\cdot\frac{x^a}{a!}\right],$$

wo $\partial^0 y_x = y_x$, $\partial^1 y_x = \partial y_x = \frac{1}{Cos\, x^2} = 1 + y^2$ ist, und wo die übrigen Ableitungen von y noch zu finden sind, wenn auch nur ihre Werthe für $x = 0$.

Weil aber $\partial y_x = 1 + y^2$ ist, so ist auch

$$\partial^{n+1} y_x = \partial^n (1 + y^2)_x = \partial^n (y^2)_x = \partial^n (y \cdot y)_x;$$

folglich nach der Formel unseres (§.) für $z = y$, in so ferne die Glieder vom Anfange und Ende einander gleich werden, so daß jedes bis zur Mitte hin doppelt erscheint, und nur wenn n *eine gerade* Zahl ist, ein mittleres Glied vorhanden ist, welches *einfach* bleibt,

$$1)\ \partial^{2n} y_x = \partial^{2n-1}(y^2)_x = 2 \cdot \underset{c+b\,=\,n-1}{S}[(2n-1)_c \cdot \partial^c y \cdot \partial^{2n-1-c} y]$$

$$2)\ \partial^{2n+1} y_x = \partial^{2n}(y^2)_x = 2 \cdot \underset{c+b\,=\,n-1}{S}[(2n)_c \cdot \partial^c y \cdot \partial^{2n-c} y] + (2n)_n \cdot (\partial^n y)^2.$$

Für $x = 0$ ist nun

$$y = 0, \quad \partial y = 1, \quad \partial^2 y = \partial(y^2) = 2y \cdot \partial y = 0;$$

und aus der Formel (1.) offenbar nach und nach

$$\partial^4 y = 0, \quad \partial^6 y = 0, \quad \partial^8 y = 0, \quad \partial^{2n} y = 0,$$

weil in dem Aggregat zur Rechten entweder $\partial^c y$ oder doch $\partial^{2n-1-c} y$, $= 0$ wird, in so ferne entweder c eine gerade Zahl oder doch $2n - 1 - c$ eine gerade Zahl ist.

In der Formel (2.) dagegen zur Rechten fallen alle die Glieder heraus, in welchen c (und dann auch $2n - c$) eine gerade Zahl ist, weil dann beide Faktoren des Gliedes $= 0$ werden, dagegen bleiben alle die Glieder, in denen c (also auch $2n - c$) eine ungerade Zahl ist. Man wird also aus (2.) die Werthe von $\partial^3 y$, $\partial^5 y$, $\partial^7 y$, $\partial^9 y$ 2c. $\partial^{2n+1} y$, für $x = 0$ erhalten, die folgenden immer durch die vorhergehenden ausgedrückt, wenn man $2c+1$ statt c schreibt, und dies gibt

$$3)\ \partial^{2n+1} y_x = 2 \cdot \underset{2c+b\,=\,n-2}{S}[(2n)_{2c+1} \cdot \partial^{2c+1} y \cdot \partial^{2n-2c-1} y] + (2n)_n \cdot (\partial^n y)^2,$$

welches letztere Glied 0 wird, also dann noch wegfällt, so oft n eine gerade Zahl ist; welche Formel (3.) endlich nur gilt, wenn $x = 0$ ist.

Aus dieser Formel ergibt sich nach und nach, wenn man 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. statt n setzt, immer nur die Werthe der Ableitungen für $x = 0$ im Auge habend:

$$\partial^3 y = 2\cdot(\partial^1 y)^2 = 2;$$

$$\partial^5 y = 2[4_1\cdot\partial y\cdot\partial^3 y] = 8;$$

$$\partial^7 y = 2\cdot[6_1\cdot\partial y\cdot\partial^5 y] + 6_3\cdot(\partial^3 y)^2;$$

$$\partial^9 y = 2\cdot[8_1\cdot\partial y\cdot\partial^7 y + 8_3\cdot\partial^3 y\cdot\partial^5 y];$$

$$\partial^{11} y = 2\cdot[10_1\cdot\partial y\cdot\partial^9 y + 10_3\cdot\partial^3 y\cdot\partial^7 y] + 10_5\cdot(\partial^5 y)^2;$$

u. s. w. f.

Setzt man nun diese Werthe in die obige Reihe für y, so hat man $Tg\,x$ nach Potenzen von x entwickelt.

Alle diese Entwicklungen haben aber nur dann praktischen Werth, wie wir schon öfter zu erwähnen Gelegenheit hatten, wenn ein Mittel vorhanden ist, die Fehler schätzen zu können, welche bei der Anwendung solcher Reihen, für numerische Werthe, indem man nur eine Anzahl erster Glieder berechnet, gemacht werden können. Daher verweisen wir hierüber auf die folgenden Theile dieses Systems.

§. 98. Zusatz.

Auf demselben Wege findet man noch,

wenn $f = y_x\cdot z_x\cdot u_x$ ist,

$$\partial^n f = S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}\cdot\partial^a y\cdot\partial^b z\cdot\partial^c u\right]_{a+b+c=n},$$

wo $\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}$ mit der Bedingung $a+b+c = n$, die Koeffizienten des entwickelten Trinomiums $(a+b+c)^n$ sind.

Aehnliche Formeln finden sich für $\partial^n f$, wenn f ein Produkt von noch mehr einzelnen Funktionen von x seyn sollte.

§. 99. Zusatz.

Da nun, die Ableitungen nach x genommen,

1) $\partial(x-a) = 1,$

2) $\partial^n(x-a)^m = m^{n|-1}\cdot(x-a)^{m-n}$

wird, und diese Formel geltend bleibt und in $m!$ übergeht, wenn $n = m$, und wahr bleibt, aber in 0 übergeht, wenn $n > m$ ist, in so ferne $m^{n|-1} = m!$ für $m = n$, — aber $= 0$ ist, für $m < n$; so folgt, wenn man im (§. 97.) $(x-a)$ statt y setzt

$$\text{I.}\quad \partial^n[(x-a)^m \cdot z_x] = S\left[\frac{(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})!}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!} \cdot \partial^{\mathfrak{a}}(x-a)^m \cdot \partial^{\mathfrak{b}} z\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n,\ \mathfrak{a}+\mathfrak{c}=m},$$

wo die beschränkende Gleichung $\mathfrak{a}+\mathfrak{c} = m$, nach der Annahme, daß jeder kleine deutsche Buchstabe 0 oder positive ganze Zahlen bedeutet, nichts weiter bewirkt, als daß man $\mathfrak{a}$ nicht größer als m nehmen kann, welches zweckmäßig ist, weil, wenn $\mathfrak{a} > m$ ist, dann $\partial^{\mathfrak{a}}(x-a)^m = 0$ wird, diese Glieder also doch wegfallen.

Wollte man aber den speziellen Werth von

$$\partial^n[(x-a)^m \cdot z_x]$$

wissen, den solche $n$te Ableitung für $x = a$ annimmt, so finden sich auch noch alle die Glieder $= 0$, in denen $\mathfrak{a} < m$ genommen wird, weil sie $x - a$, also jetzt 0, zum Faktor haben. Man muß daher jetzt bloß $\mathfrak{a} = m$ nehmen, wenn $m \overline{\leq} n$ ist, während nothwendig alle Glieder $= 0$ werden, wenn $m > n$ ist; und man erhält daher in allen 3 Fällen

$$\text{II.}\quad \partial^n[(x-a)^m \cdot z_x]_{\text{für } x = a} = n^{m|-1} \cdot \partial^{n-m} z_x,$$

welcher Ausdruck zur Rechten in $m!\,(z_x)_0$ übergeht, wenn $n = m$, und in 0, wenn $n < m$ ist.

Anmerkung. Diese Sätze sind im (II. Th. dies. Syst. §§. 448—450.) für ganze Funktionen gegeben, und zur Auffindung der gleichen Wurzelwerthe einer höhern Gleichung, oder, was dasselbe ist, zur Auffindung der gleichen Faktoren von der Form $x - a$ einer ganzen Funktion von x angewandt worden. *) Hier dagegen kann z eine beliebige Funktion von x seyn.

---

*) Hat nämlich eine höhere Gleichung $F_x = 0$, gleiche Wurzelwerthe, so ist F_x von der Form $(x-a)^m \cdot z_x$, so daß man hat

nachdem $Cos\,z$ positiv oder negativ ist, weil eigentlich $\partial z_x = \frac{1}{Cos\,z}$ gefunden wird.

Also ist

$$\partial^n z_x = \partial^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)_x = (n-1)!\ S\left[\frac{1^{b+c|2}}{b!\,2^{c|2}} \cdot \frac{x^b}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+b+c}}\right]_{b+2c=n-1},$$

wenn man das vorhergehende Beispiel zu Hilfe nimmt.

So ist z. B. der eben für $\partial^5 y_x$ gefundene Ausdruck, zu gleicher Zeit der durch $\partial^6 z_x$ vorgestellte.

Wollte man z. B. $\frac{1}{Sin}x$ in eine Reihe verwandeln, nach Potenzen von x fortlaufend, so hätte man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatz

$$\frac{1}{Sin}x = S\left[\left(\partial^a\left[\frac{1}{Sin}x\right]_x\right)_0 \cdot \frac{x^a}{a!}\right],$$

oder, $a = 0$ und $a+1$ statt a setzend, nach (II. Th. §. 389.):

$$\frac{1}{Sin}x = \frac{1}{Sin}0 + S\left[\left(\partial^{a+1}\left[\frac{1}{Sin}x\right]_x\right)_0 \cdot \frac{x^{a+1}}{(a+1)!}\right],$$

während, wie so eben gefunden worden, für jeden stehenden Werth von a, $a+1$ statt n setzend:

$$\partial^{a+1}\left(\frac{1}{Sin}x\right)_x = a! \times S\left[\frac{1^{b+c|2}}{b!\,2^{c|2}} \cdot \frac{x^b}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}+b+c}}\right]_{b+2c=a}$$

ist, also für $x = 0$, (weil dann x^b allemal 0 wird, sobald nicht b selber 0 ist, weil also dann b bloß den Werth 0, und dann, wegen $b+2c = a$, dieses a bloß eine gerade Zahl 2c seyn kann), überall 2c statt a setzend,

$$\left[\partial^{2c+1}\left(\frac{1}{Sin}x\right)_x\right]_0 = (2c)!\,\frac{1^{c|2}}{2^{c|2}.\sqrt{1}}, \text{*)}$$

so wie

$$\frac{1}{Sin}x = \frac{1}{Sin}0 + S\left[\left(\partial^{2c+1}\left[\frac{1}{Sin}x\right]_x\right)_0 \cdot \frac{x^{2c+1}}{(2c+1)!}\right];$$

---

*) Wir lassen hier $\sqrt{1}$ stehen und setzen nicht +1 und auch nicht −1 dafür, weil, welches von beiden geschehen darf, noch untersucht werden muß; wie die nun gleich folgenden Zeilen solches für den gegenwärtigen Fall noch besonders nachweisen.

folglich

$$\frac{1}{Sin}x = \frac{1}{Sin}0 + \frac{1}{\sqrt{1}} \cdot S\left[\frac{1^{c|2}}{2^{c|2}} \cdot \frac{x^{2c+1}}{2c+1}\right];$$

d. h. weil $\frac{1}{Sin}0 = \pm 2a\pi$ oder $\pm(2a+1)\pi$ ist, je nachdem der Kosinus, d. h. die oben in Rechnung getretene $\sqrt{1-x^2}$, jetzt $\sqrt{1}$, positiv oder negativ ist, sowohl

$$\text{I. } \frac{1}{Sin}x = \pm 2a\pi + S\left[\frac{1^{c|2}}{2^{c|2}} \cdot \frac{x^{2c+1}}{2c+1}\right],$$

als auch

$$\text{II. } \frac{1}{Sin}x = \pm(2a+1)\pi - S\left[\frac{1^{c|2}}{2^{c|2}} \cdot \frac{x^{2c+1}}{2c+1}\right].$$

Gewöhnlich nimmt man bloß die Formel (I.) für den Werth $a = 0$, so daß man findet

$$\frac{1}{Sin}x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^9}{9} + \cdots,$$

und dieser Ausdruck zur Rechten gibt offenbar einen der unendlich vielen Bogen φ, welche den gegebenen Sinus $= x$ haben, während dann alle zugehörigen Bogen in den Formen

$$\pm 2a\pi + \varphi \quad \text{und} \quad \pm(2a+1)\pi - \varphi$$

stecken, in so ferne nämlich

$$Sin(\pm 2a\pi + \varphi) = Sin(\pm(2a+1)\pi - \varphi) = Sin\,\varphi \quad \text{ist.}$$

Im zweiten Theile dieses Systems (§. 667.) ist aber bereits dieselbe, jetzt eben ganz allgemein gelöste Aufgabe vorgelegt, jedoch dort das Resultat bloß auf dem Wege der Induktion gefunden worden, weswegen die Gelegenheit hier abgewartet werden mußte, um mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes diese Aufgabe dadurch ganz befriedigend lösen zu können, daß solcher mit dem (§. 96.) hier in Verbindung gebracht wurde.

Und nicht schwer würde es halten, gerade auf demselben Wege auch

$$\frac{1}{Cos}x \quad \text{d. h. arc } Cos\,x$$

in eine nach ganzen Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln. *)

---

*) Dies findet sich jedoch einfacher, wenn man bemerkt, daß

$$Sin\,\varphi = Cos\,[2c\pi \pm (\tfrac{1}{2}\pi - \varphi)]$$

ist, daß also, wenn

Beispiel 3. Wir wollen als letztes Beispiel den allgemeinen Fall nehmen, wo

$$u = (a+bx+cx^2)^p$$

ist, und wo nun $\partial^n u$ direkt gefunden werden soll.

Weil aber

$$a+b(x+h)+c(x+h)^2 = (a+bx+cx^2)+(b+2cx)h+ch^2$$

ist, so hat man nach dem trinomischen Lehrsatze,

wenn $a+bx+cx^2 = f$, $b+2cx = g$ gesetzt wird,

$$u_{x+h} = S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\cdot f^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\cdot g^{\mathfrak{a}}\cdot c^{\mathfrak{b}}\cdot h^{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}}\right],$$

also nach unserem (§.)

$$\partial^n u_x = n!\times S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\cdot(a+bx+cx^2)^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\cdot(b+2cx)^{\mathfrak{a}}\cdot c^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}=n}.$$

Sollte der Werth dieses $\partial^n u_x$ für $x = 0$ gefunden werden, so erhielte man

$$\left(\partial^n u_x\right)_0 = n!\,S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!}\cdot a^{p-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}\cdot b^{\mathfrak{a}}\cdot c^{\mathfrak{b}}\right]_{\mathfrak{a}+2\mathfrak{b}=n}.$$

Gesetzt es wäre $\frac{1}{Tg}x$ in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe zu verwandeln, so hätte man nach dem Maclaurin'schen Lehrsatz

---

$$Cos\,[2c\pi\pm(\tfrac{1}{2}\pi-\varphi)] = x$$

ist, dann auch $Sin\,\varphi = x$ seyn werde; daß mithin

$$\frac{1}{Cos}x = 2c\pi\pm(\tfrac{1}{2}\pi-\frac{1}{Sin}x)$$

ist, wo statt c, jede positive und auch jede negative ganze Zahl und auch 0, statt $\frac{1}{Sin}x$ aber einer der Werthe und zwar der durch die Reihe

$$\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots$$

vorgestellte gesetzt werden muß, indem man dabei sowohl $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{Sin}x$ addirt als subtrahirt, wenn man alle Werthe von $\frac{1}{Cos}x$ haben will.

$$\frac{1}{Tg}x = S\left[\left(\partial^c \frac{1}{Tg}x\right)_0 \cdot \frac{x^c}{c!}\right]$$

die Ableitungen nach x genommen; dabei ist aber

$$\left(\partial^0 \frac{1}{Tg}x\right)_0 = \left(\frac{1}{Tg}x\right)_0 = \pm \mathfrak{d}\pi,$$

und
$$\partial \frac{1}{Tg}x = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1};$$

also, wenn c irgend eine ganze Zahl bedeutet,

$$\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \partial^{c-1}\left[(1+x^2)^{-1}\right].$$

Weil aber $(1+x^2)^{-1}$ der besondere Fall des obigen u ist, in welchem $p = -1$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, so hat man nach dem oben gefundenen Resultat:

$$\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \partial^{c-1}\left[(1+x^2)^{-1}\right]_x$$

$$= S\left[\frac{(-1)^{a+b|-1}}{a!\ b!} \cdot (c-1)!\ (1+x^2)^{p-a-b}(2x)^a \atop a+2b = c-1\right].$$

Und da für $x = 0$, $(2x)^a$ allemal 0 wird, so oft a nicht 0 ist, so hat für $x = 0$, a bloß den Werth 0, und es ist also für $x = 0$, $\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right)$ selbst gleich 0, so oft $c-1$ eine ungerade Zahl, also c eine gerade Zahl ist, weil die beschränkende Gleichung $a+2b = c-1$, dann $a = 0$ nicht werden läßt. Ist aber c eine ungerade Zahl, so ist $a = 0$, $2b = c-1$ oder $c = 2b+1$, also, weil $(-1)^{b|-1} = (-1)^b \cdot b!$ ist, für $x = 0$, wo $a = 0$ ist,

$$\partial^c\left(\frac{1}{Tg}x\right) = \partial^{2b+1}\left(\frac{1}{Tg}x\right) = S\left[(-1)^b \cdot (2b)!\right];$$

also nach dem Maclaurin'schen Satze

$$\frac{1}{Tg}x = \pm \mathfrak{d}\pi + S\left[(-1)^b \cdot (2b)!\, \frac{x^{2b+1}}{(2b+1)!}\right]$$

oder
$$\frac{1}{Tg}x = \pm \mathfrak{d}\pi + S\left[(-1)^b \cdot \frac{x^{2b+1}}{2b+1}\right],$$

gerade wie dieses im zweiten Theile dieses Systems (§. 669.) gefunden worden ist.

Anmerkung. In dem Beispiel (3.) ist aber das Beispiel (1.) als ein besonderer Fall enthalten, wenn $p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$ gesetzt wird.

Uebrigens kann dieses allgemeinere Beispiel (3.) auch noch so umgeformt werden. Man hat, wenn $a + bx + cx^2 = f$ und $b + 2cx = \partial f = g$ gesetzt wird,

$$f_{x+h} = f \cdot (1 + \frac{g}{f} \cdot h + \frac{c}{f} \cdot h^2) = f \cdot \left[(1 + \frac{g}{2f} h)^2 + \frac{4cf - g^2}{4f^2} \cdot h^2\right];$$

folglich, weil $4cf - g^2 = 4ac - b^2$ ist, nach dem binom. Lehrsatz:

$$u_{x+h} = (f_{x+h})^p = f^p \cdot \left[(1 + \frac{g}{2f} \cdot h)^2 + \frac{4ac - b^2}{4f^2} \cdot h^2\right]^p$$

$$= f^p \cdot S\left[\frac{p^{a|-1}}{a!} \cdot (1 + \frac{g}{2f} \cdot h)^{2p-2a} \cdot \frac{(4ac - b^2)^a}{4^a \cdot f^{2a}} \cdot h^{2a}\right],$$

während wiederum nach demselben binomischen Lehrsatze

$$(1 + \frac{g}{2f} h)^{2p-2a} = S\left[\frac{(2p - 2a)^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{g^b}{2^b \cdot f^b} \cdot h^b\right]$$

seyn wird, so daß, diese Reihe in vorige Gleichung substituirend,

$$u_{x+h} = f^p \cdot S\left[\frac{p^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2p - 2a)^{b|-1}}{b!} \cdot \frac{g^b \cdot (4ac - b^2)^a}{2^{b+2a} \cdot f^{2a+b}} \cdot h^{2a+b}\right],$$

also nach unserm (§.)

$$\partial^n u_x = \frac{n!\, f^p}{2^n \cdot f^n} \times \underset{2a+b=n}{S}\left[\frac{p^{a|-1}}{a!} \cdot \frac{(2p - 2a)^{b|-1}}{b!} \cdot (4ac - b^2)^a \cdot g^b\right],$$

oder, wenn man $n - 2a$ statt b setzt, (weil

$$n! \frac{(2p - 2a)^{n-2a|-1}}{(n - 2a)!} = n^{2a|-1} \cdot (2p - 2a)^{n-2a|-1}$$

$$= (2p)^{n|-1} \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(2p)^{2a|-1}} \qquad \text{ist}),$$

$$\partial^n u_x = (2p)^{n|-1} \cdot (\tfrac{1}{2} g)^n f^{p-n} \cdot S\left[p_a \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(2p)^{2a|-1}} \cdot \frac{(4ac - b^2)^a}{g^{2a}}\right]$$

wird.

Wendet man dies auf $\partial^n\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\right)$ an, so hat man

$p = -\frac{1}{2}$, $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, $g = -2x$,

$$\left(\frac{4ac-b^2}{g^2}\right)^a = \left(\frac{-4}{+4x^2}\right)^a = \left(-\frac{1}{x^2}\right)^a = (-1)^a \cdot \frac{1}{x^{2a}};$$

und weil noch überdies jetzt

$$(2p)^{n|-1} \cdot (-1)^n = (-1)^{n|-1} \cdot (-1)^n = 1^{n|1} = n!,$$

$$\frac{(-\frac{1}{2})^{a|-1} \cdot (-1)^a}{a!} = \frac{1^{a|2}}{2^{a|2}},$$

so wie

$$\frac{p^{a|-1} \cdot (-1)^a}{a!} \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(2p)^{2a|-1}} = \frac{1^{a|2}}{2^{a|2}} \cdot \frac{n^{2a|-1}}{(-1)^{2a|-1}} = \frac{1^{a|2}}{2^{a|2}} \cdot n_{2a}$$

wird (in so ferne $(-1)^{2a|-1} = 1^{2a|1} = (2a)!$ ist), so findet sich nun

$$\partial^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{n!}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \cdot S\left[\frac{1^{a|2}}{2^{a|2}} \cdot n_{2a} \cdot \frac{1}{x^{2a}}\right],$$

welche Form des Resultats jedoch nicht sehr geeignet ist, den Werth dieser $n$ten Ableitung für $x = 0$ zu geben, wie solcher im Verlaufe des Beispiels (1.) verlangt worden war.

§. 97. Zusatz.

Ist $f = y \cdot z$, und sind y und z selber wieder Funktionen von x, nämlich y_x und z_x, so wird $\partial^n f_{(x)}$ d. h. $\partial^n(yz)_x$ oder $\frac{d^n(yz)}{dx^n}$ nun auf demselben, (§. 96.) beschriebenen Wege gefunden.

Es wird aber jetzt

$$y_{x+h} = S\left[\partial^a y_x \cdot \frac{h^a}{a!}\right],$$

$$z_{x+h} = S\left[\partial^b z_x \cdot \frac{h^b}{b!}\right];$$

also

$$f_{(x+h)} = y_{x+h} \cdot z_{x+h} = S\left[\partial^a y \cdot \partial^b z \cdot \frac{h^{a+b}}{a!\, b!}\right];$$

und demnach (nach §. 96.)

$$\partial^n f_{(x)} = n!\, \underset{a+b=n}{S}\left[\frac{\partial^a y_x \cdot \partial^b z_x}{a!\ b!}\right],$$

das erste Glied der gesuchten Reihe ist. — Setzt man nachher noch

$$3+\alpha = 3\alpha, \qquad \text{also} \quad \alpha = \frac{3}{2},$$

so hat man noch einen Werth von α, zu welchem sich

$$A - aA^3 = 0 \qquad \text{d. h.} \quad A = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)} \text{ findet,}$$

so daß $\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)} \cdot x^{\frac{3}{2}}$ wiederum das erste Glied eines andern Werthes von y ist, nach fallenden Potenzen von x geordnet. — Zu diesen ersten Gliedern findet man dann die zweiten und folgenden ohne weiteres.

Auf diesem Wege findet man dann

$$y = -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12} - \text{ꝛc. ꝛc.}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{und } y &= +a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a - \frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} - \text{ꝛc. ꝛc.} \\ y &= -a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a + \frac{3}{8}a^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}a^4x^{-3} + \text{ꝛc. ꝛc.} \end{aligned}\right\},$$

welche drei Reihen den 3 Werthen von y entsprechen.

Anmerkung 1. Am Schlusse dieser Entwicklung einer durch eine Gleichung verwickelt gegebenen Funktion y von x, in Reihen, welche bald nach steigenden, bald nach fallenden Potenzen von x fortlaufen, muß jedoch noch bemerkt werden, daß man aus reelen Koeffizienten dieser Reihen nicht auf reele Werthe von y schließen könne; weil dazu erfordlich wäre 1) daß man das Gesetz habe, nach welchem sich alle Glieder der Reihe richten, um überzeugt seyn zu können, daß nicht noch einer der folgenden Koeffizienten imaginär werde, 2) daß die Reihe konvergent sey, was für jeden besondern Werth von x ebenfalls erst dann völlig außer Zweifel gesetzt werden kann, wenn das Gesetz der einzelnen Glieder gehörig bekannt ist.

Es ist daher diese in den (§§. 106. — 109.) beschriebene Methode, offenbar in praktischen Untersuchungen mit großem Nutzen zu gebrauchen; will man jedoch die gewonnenen Resultate für nothwendig wahre ansehen können, so müssen jedesmal noch eigene dahin zielende Untersuchungen hinzugefügt werden, welche noch überdies, wegen unübersteiglicher Hindernisse, denen man begegnet, oft ohne Erfolg bleiben.

Anmerkung 2. Da transzendente Funktionen allemal in unendlichen Reihen dargestellt werden können, und da die Aufgabe des (§. 106.) für jede beliebige Gliederzahl der gegebenen Gleichung statt findet, so kann man dasselbe Verfahren auch noch mit Erfolg versuchen, wenn die gegebene Gleichung zwischen y und x eine transzendente seyn sollte.

§. 110. Zusatz.

Ist y in x verwickelt gegeben, so kann im Allgemeinen (d. h. so lange noch x jeden Werth vorstellt) y_{x+h} allemal mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt werden, weil man, dem (§. 64.) zu Folge, annimmt, daß die Ableitungen ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x$, rc. rc. aus der verwickelt gegebenen Gleichung eben so gut gefunden werden können, wie wenn y_x entwickelt gegeben ist. — Wenn aber für einen gewissen Werth a von x, eine solche Reihe nicht mehr existirt, so setzt man direkt $a+h$ statt x, so wie $y+\Delta y$ statt y, und entwickelt dann Δy nach Potenzen von h, ganz den (§§. 106.—109.) gemäß. Oder man setzt bloß $a+h$ statt x, und y_1 statt y (wo y_1 den Ausdruck y_{a+h} vorstellt), und entwickelt y_1 nach Potenzen von h, diese (§§. 106.—109.) anwendend.

Schluß-Anmerkung.

Uebrigens könnte man, mag die Funktion y von x entwickelt oder verwickelt gegeben seyn, so oft sie sich nach negativen oder gebrochenen Potenzen von x wirklich entwickeln läßt, solche Entwicklung auch immer mittelst des Maclaurin'schen Lehrsatzes bewirken. — Setzte man nämlich $x = z^n$, so könnte man n so nehmen, daß jede gebrochene Potenz von x eine ganze Potenz von z wird; und multiplizirte man y noch mit z^m, so könnte man m noch so nehmen, daß $y \cdot z^m$, bloß positive Potenzen von z enthielte. Wenn aber $y \cdot z^m$ nach ganzen positiven Potenzen von z entwickelt werden kann, so kann dies auch durch die Maclaurin'sche Reihe geschehen; während zuletzt $x^{\frac{1}{n}}$ statt z gesetzt, und das Ganze durch z^m d. h. $x^{\frac{m}{n}}$ dividirt wird, um y selbst zu haben. Es versteht sich dabei von selbst, daß man an-

fänglich, bei der Entwicklung von $y \cdot z^m$, die Exponenten noch ganz unbestimmt ließe, und sie dann zuletzt nur so bestimmte, daß keiner der Koeffizienten der Maclaurin'schen Reihe, die im Kalkul unzulässige Form $\frac{1}{0}$ annehmen könnte.

Die wirkliche Ausführung dieses Verfahrens ist aber selten von wahrem praktischen Nutzen, weil so viele Zwischenglieder der Reihe nach z, 0 zum Koeffizienten bekommen, so daß man eine viel größere Zahl von Gliedern berechnen muß, als man zuletzt deren wirklich (ohne Null-Koeffizienten) hat.

Daß sich übrigens ein gleiches Verfahren auch auf f_{a+h} anwenden ließe, so oft solches f_{a+h} in seiner Entwicklung gebrochene oder auch negative Potenzen von h in sich aufnimmt, bedarf wohl keiner weitern Erwähnung.

Höhere Zahlenlehre.

Fünftes Kapitel.

Einige Anwendungen der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung auf analytische Untersuchungen. Eigenschaften der homogenen Funktionen. Zerlegung der gebrochenen Funktionen in ihre Parzial-Brüche. Bestimmung der $\frac{0}{0}$, der größten und kleinsten und der Grenz-Werthe.

Vorerinnerung.

In diesem Kapitel wird man auf's neue bestätigt finden, daß alle Anwendungen der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung in dem Gebrauche des Taylor'schen oder des Maclaurin'schen Lehrsatzes und in dem Umstande begründet sind, daß aus $\varphi = \psi$ auch noch $\partial\varphi = \partial\psi$, $\partial^2\varphi = \partial^2\psi$, ꝛc. ꝛc. folgt. Einigen dieser Anwendungen begegnet man schon im zweiten Theile dieses Systems für ganze Funktionen, hier auf beliebige, und dabei entwickelt oder verwickelt gegebene Funktionen y von x, ausgedehnt.

Erste Abtheilung.

Theorie der homogenen Funktionen.

§. 111. Erklärung.

Eine ganze Funktion zweier Veränderlichen x und y heißt homogen und von der mten Dimension, wenn sie in der Form

$$\underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot x^a \cdot y^b]$$

d. h. $A_m \cdot x^m + A_{m-1} \cdot x^{m-1}y + A_{m-2} \cdot x^{m-2}y^2 + \cdots$
$+ A_3 \cdot x^3 y^{m-3} + A_2 \cdot x^2 y^{m-2} + A_1 \cdot xy^{m-1} + A_0 \cdot y^m$

ist, wo A_0, A_1, A_2, $\cdots$ A_m, also A_a, beliebige Koeffizienten vorstellen (welche also zum Theil auch 0 seyn können).

Eben so enthält

$$\underset{a+b+c=m}{S}[A_a \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c]$$

alle ganzen homogenen Funktionen der mten Dimension der 3 Veränderlichen x, y und z.

Und nicht schwer erkennt man hieraus die Form der ganzen homogenen Funktionen von 4 und mehr Veränderlichen.

Der Quotient zweier ganzen homogenen Funktionen, zweier, dreier oder mehrer Veränderlichen, von denen der Dividend von der mten Dimension, der Divisor aber von der nten Dimension ist, heißt eine gebrochene homogene Funktion von der (m—n)ten Dimension.

Endlich gibt es auch noch irrationale homogene Funktionen von der mten Dimension, z. B.

$$f_x + \sqrt[3]{\varphi_x} - \sqrt{\psi_x}$$

wenn f_x, φ_x, ψ_x homogene ganze oder gebrochene Funktionen sind, und zwar f_x von der mten Dimension, φ_x von der 3mten Dimension und ψ_x von der 2mten Dimension.

Beispiele. So sind

$$x^3 - 2xy^2 - 7y^3; \quad 4x^2 - 2xy;$$
$$ax^5 - by^5; \quad ax^4y - bx^2y^3 + cxy^4; \quad axyz - bz^3 - cx^2y;$$

u. s. w. f.; homogene ganze Funktionen beziehlich von der 3ten, 2ten, 5ten, und 3ten Dimension. Dagegen sind

$$\frac{x+y}{x^2-3y^2}, \quad \frac{x^3-4x^2y}{xy^2-y^3}, \quad \frac{5x^4-3xy^3+y^4}{x-y}, \quad \frac{3x^2-2xy+y^2}{3x^6-8x^3y^3+xy^5},$$

homogene gebrochene Funktionen beziehlich von der (—1)ten, 0ten, 3ten und (—4)ten Dimension. —

und $2\frac{x^2}{y^3} - \frac{3}{x} - \frac{\sqrt[3]{x^2y + xy^2}}{\sqrt{x^4 - 5y^4}}$ ist eine homogene irrationale Funktion der (—1)ten Dimension.

§. 112. Zusatz.

1) Setzt man in der homogenen ganzen Funktion zweier Veränderlichen x und y, von der mten Dimension, nämlich in

$$F_{x,y} \quad \text{oder} \quad \underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot x^a y^b],$$

$y = ux$, so wird solche

$$F_{x,y} = x^m \cdot \underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot u^b],$$

d. h. ein Produkt aus x^m in eine bloße ganze Funktion von u allein.

2) Setzt man in einer gebrochenen homogenen Funktion von der m — nten Dimension

$$f_{x,y} \quad \text{oder} \quad \underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot x^a \cdot y^b] : \underset{a+b=n}{S}[B_a \cdot x^a \cdot y^b],$$

$y = ux$, so erhält man

$$f_{x,y} = x^{m-n} \times \left(\underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot u^b] : \underset{a+b=n}{S}[B_a \cdot u^b]\right),$$

d. h. ein Produkt aus x^{m-n} in eine gebrochene Funktion von u allein.

Ist daher die gebrochene homogene Funktion von der 0ten Dimension (d. h. ist $m = n$), so geht $f_{x,y}$ in eine bloße gebrochene Funktion des einzigen Veränderlichen u über.

3) Wird in der homogenen ganzen Funktion

$$F_{x,y,z} \quad \text{oder} \quad \underset{a+b+c=m}{S}[A_a \cdot x^a \cdot y^b \cdot z^c],$$

$y = ux$ und $z = vx$ gesetzt, so geht solche über in

$$F_{x,y,z} = x^m \cdot \underset{a+b+c=m}{S}[A_a \cdot u^b \cdot v^c].$$

4) Und ist die homogene Funktion von x, y, z eine gebrochene, von der m — nten Dimension, so geht solche, wenn $y = ux$ und $z = vx$ gesetzt wird, in ein Produkt aus

Und enthalten φ und ψ die 3 Veränderlichen x, y und z, so wird noch hinzugenommen

$$\partial F_z \cdot z = \frac{\psi \cdot \partial\psi_z - \varphi \cdot \partial\varphi_z}{\psi^2} \cdot z,$$

und es ergibt sich sogleich die Formel (§. 113. N. 4.) für gebrochene homogene Funktionen.

§. 115. Zusatz.

Nimmt man überhaupt von

$$1) \qquad F_{x,y} = \underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot x^a y^b]$$

die $c$te Ableitung nach x, so erhält man

$$2) \qquad \partial^c F_x = \underset{a+b=m}{S}[a^{c|-1} \cdot A_a \cdot x^{a-c} \cdot y^b],$$

und hiervon wieder die $d$te Ableitung nach y;

$$3) \qquad \partial^{c,d} F_{x,y} = \underset{a+b=m}{S}[a^{c|-1} \cdot b^{d|-1} \cdot A_a \cdot a^{a-c} \cdot y^{b-d}],$$

welche Gleichung, wenn man noch links und rechts mit $\frac{(c+d)!}{c!\,d!} \cdot x^c \cdot y^d$ multiplizirt,

$$4) \; \frac{(c+d)!}{c!\,d!} \cdot \partial^{c,d} F_{x,y} \cdot x^c \cdot y^d = (c+d)!\; \underset{a+b=m}{S}\left[\frac{a^{c|-1}}{c!} \cdot \frac{b^{d|-1}}{d!} A_a \cdot x^a \cdot y^b\right]$$

gibt.

Denkt man sich in dieser Gleichung nach und nach statt c und d, 0 und alle ganzen Zahlen gesetzt, welche jedoch der Gleichung $c+d = n$. entsprechen, und zuletzt alle diese Gleichungen zu einander addirt, so erhält man, weil (nach II. Th. §§. 410.—412.)

$$\underset{c+d=n}{S}\left[\frac{a^{c|-1}}{c!} \cdot \frac{b^{d|-1}}{d!}\right] = \frac{(a+b)^{n|-1}}{n!} \quad \text{ist,}$$

$$5) \qquad \underset{c+d=n}{S}\left[\frac{(c+d)!}{c!\,d!} \cdot \partial^{c,d} F_{x,y} \cdot x^c \cdot y^d\right] = m^{n|-1} \cdot F_{x,y};$$

in welcher allgemeinen Formel der spezielle Fall des (§. 113. N. 3.) liegt, wenn $n = 1$ gesetzt wird.

Und leicht läßt sich auf ähnlichem Wege noch finden, daß wenn F eine homogene ganze Funktion dreier Veränderlichen x, y, z, von der mten Dimension ist, dann

$$6)\quad S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\,b!\,c!}\cdot\partial^{a,b,c}F_{x,y,z}\cdot x^a y^b z^c\right]_{a+b+c=n} = m^{n|-1}\cdot F_{x,y,z}$$

seyn werde, welche allgemeinere Formel den speziellen Fall der (§. 113. N. 4.), für $n = 1$, in sich schließt.

Anmerkung. Setzt man in den vorstehenden Formeln statt der Faktoren x, y, z, die Differenzialien dx, dy, dz, so sind die Ausdrücke zur Linken, weil

$$\partial^{a,b}F_{x,y} = \frac{d^{a+b}F}{dx^a\cdot dy^b},$$

und
$$\partial^{a,b,c}F_{x,y,z} = \frac{d^{a+b+c}F}{dx^a\cdot dy^b\cdot dz^c}$$
ist,

nichts anders als die vollständigen Differenzialien d^nF. — Umgekehrt also erhält man $m\cdot F$ wenn man in dem Differenzial dF, d. h. $\frac{dF}{dx}\cdot dx + \frac{dF}{dy}\cdot dy$ oder $\frac{dF}{dx}\cdot dx + \frac{dF}{dy}\cdot dy + \frac{dF}{dz}\cdot dz$, statt der Faktoren dx, dy, dz, die Veränderlichen x, y, z, selbst setzt, (§. 113. NN. 3. 4.). Und eben so erhält man $m^{n|-1}\cdot F$, sobald man d^nF entwickelt, und dann x, y, z, statt der Faktoren dx, dy, dz setzt.

§. 116. Zusatz.

Diese in den (§§. 113.—115.) entwickelten merkwürdigen Eigenschaften der homogenen Funktionen, lassen sich auch noch auf folgendem Wege erhalten:

Ist nämlich F eine beliebige homogene ganze oder gebrochene oder irrationale Funktion von der mten Dimension, von beliebig viel Veränderlichen x, y, z, rc. rc., wo m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, und setzt man in ihr xt, yt,

zt, 2c. 2c. statt x, y, z, so erhält man, den (§. 112. NN. 6. 7.) zu Folge:

$$1)\qquad F_{xt,yt,zt,\ldots} = t^m \cdot F_{x,y,z,\ldots},$$

oder wenn $1+h$ statt t gesetzt wird,

$$2)\ F_{x+hx,y+hy,z+hz,\ldots} = (1+h)^m \cdot F_{x,y,z,\ldots}.$$

Nun ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze für beliebig viel Veränderliche (III. Th. §. 30.), hx, hy, hz, ... statt Δx, Δy, Δz, ... setzend:

$$3)\ F_{x+hx,y+hy,z+hz,\ldots} = \underset{a+b+c+\cdots = p}{S}\left[\partial^{a,b,c,\ldots}F_{x,y,z,\ldots} \cdot \frac{x^a}{a!} \cdot \frac{y^b}{b!} \cdot \frac{z^c}{c!} \cdots h^p\right],$$

während nach dem binomischen Lehrsatze (§. 402. des II. Th.)

$$4)\qquad (1+h)^m = S\left[\frac{m^{p|-1}}{p!} \cdot h^p\right]$$

seyn wird. — Substituirt man aber diese Werthe in (2.), so erhält man zwei nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihen, welche einander gleich seyn müssen, und in welchen daher auch die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von h beziehlich einander gleich sind, also namentlich, wenn n statt p gesetzt wird, die Koeffizienten von h^n; und dies gibt

$$5)\ \underset{a+b+c+\cdots = n}{S}\left[\partial^{a,b,c,\ldots}F_{x,y,z,\ldots} \cdot \frac{x^a}{a!} \cdot \frac{y^b}{b!} \cdot \frac{z^c}{c!} \cdots\right] = \frac{m^{n|-1}}{n!} \cdot F_{x,y,z,\ldots},$$

welche Formel, wenn man auf jeder Seite mit n! multiplizirt, die Formeln (§. 113. NN. 3. 4. und §. 115. NN. 5. 6.) in sich schließt, aber nicht bloß für ganze sondern auch für gebrochene und irrationale homogene Funktionen von der mten Dimension gilt, deshalb allgemeiner ist, als die im (§. 115.) hingestellten.

Zweite Abtheilung.

Von der Zerlegung der ächt gebrochenen algebraischen Funktionen in ihre Parzial-Brüche.

---

§. 117. Aufgabe.

Es ist $\frac{M}{N}$ eine ächt gebrochene Funktion von x, und $N = (ax-b) \cdot P$, dabei N vom Grade n, also P vom Grade n−1; man soll $\frac{M}{N}$ in die beiden Parzial-Brüche $\frac{A}{ax-b} + \frac{Q}{P}$ zerlegen.

Auflösung.

Man setze statt Q eine ganze Funktion vom Grade n−2, mit n−1 unbestimmten Koeffizienten, während A ebenfalls unbestimmt, aber konstant ist. — Aus der Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{ax-b} + \frac{Q}{P}$$

entwickle man: $M = AP + (ax-b) \cdot Q$

und erhält dann, nach (§§. 425.—427. d. II. Th.), n Gleichungen, welche im allgemeinen, da sie in Bezug auf die n Unbestimmten, einfache sind, zur Bestimmung derselben dienen werden; obgleich in besondern Fällen diese n Gleichungen sich auch zum Theil widersprechen und dann die Unmöglichkeit der Aufgabe ausdrücken können.

Die Aufgabe ist daher im allgemeinen möglich, kann dagegen in besondern Fällen unmöglich seyn. *)

---

*) Diese Redensart hier, und so oft sie vorkommt, soll nichts anders sagen, als daß, so lange die Zahlzeichen ganz allgemein sind, ihnen solche Werthe beigelegt werden können, für welche die Aufgabe möglich wird, daß sie aber nicht nothwendig für jeden Werth der allgemeinen Ausdrücke möglich seyn muß.

Anmerkung. Da, wenn

$$M = A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \ldots + A_m$$

und $N = B_0 \cdot x^n + B_1 \cdot x^{n-1} + B_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + B_n$

ist, sogleich

$$\frac{M}{N} = \frac{A_0}{B_0} \cdot \frac{x^m + \frac{A_1}{A_0} \cdot x^{m-1} + \frac{A_2}{A_0} \cdot x^{m-2} + \ldots + \frac{A_m}{A_0}}{x^n + \frac{B_1}{B_0} \cdot x^{n-1} + \frac{B_2}{B_0} \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{B_n}{B_0}},$$

geschrieben werden kann, so kann man im Folgenden allemal die höchsten Potenzen von x ohne andere Koeffizienten (als 1) voraussetzen, so daß die Faktoren die Form $x - a$, $x - b$, $x - c$, &c. annehmen.

§. 118. Lehrsatz.

Ist $\frac{M_x}{N_x}$ eine ächt gebrochene Funktion von x, und $N_x = (x - a) \cdot P_x$, so läßt sich allemal wirklich

$$\frac{M_x}{N_x} \text{ in } \frac{A}{x - a} + \frac{Q_x}{P_x}$$

zerlegen, wenn nur $x - a$ kein Theiler von P_x ist.

Und dabei ist allemal

$$A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a},$$

unter $(M_x)_a$ und $(P_x)_a$ das verstanden, was aus M_x und P_x wird, wenn a statt x gesetzt wird; und Q_x ist allemal vom niedrigern Grade als P_x.

Beweis. Soll nämlich

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x - a} + \frac{Q_x}{P_x}$$

werden, so müßte

$$M_x = A \cdot P_x + (x - a) \cdot Q_x,$$

also

$$Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x - a}$$

werden, folglich $M_x - A \cdot P_x$ durch $x-a$ theilbar seyn, mithin für $x=a$ Null werden. — Umgekehrt aber, ist $(M_x)_a - A \cdot (P_x)_a = 0$, also $A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a}$, so ist auch $M_x - A \cdot P_x$ durch $x-a$ theilbar, nach (II. Th. §. 433.); folglich Q_x möglich, so oft A möglich ist, d. h. so oft $(P_x)_a$ nicht Null ist, d. h. so oft P_x nicht mehr durch $x-a$ theilbar ist.

Anmerkung 1. Weil aber

$$N_x = (x-a) \cdot P_x$$

ist, so hat man auch, nach (§. 99.):

$$(\partial N_x)_a \text{ *)} = (P_x)_a,$$

so daß man $(P_x)_a$ direkt aus dem gegebenen Nenner N_x finden kann, ohne P_x selbst haben zu müssen.

Anmerkung 2. Wäre $N_x = (\alpha x - \beta) \cdot P_x$, so hätte man $\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{\alpha x - \beta} + \frac{Q_x}{P_x}$, also $Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{\alpha x - \beta}$, also $(M_x)_{\beta:\alpha} - A \cdot (P_x)_{\beta:\alpha} = 0$, woraus A bestimmt wird, während dann Q_x von selbst sich ergibt.

Da ferner jetzt

$$N_x = (\alpha x - \beta) \cdot P_x = \left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \alpha P_x$$

ist, so hat man nun

$$(\partial N_x)_{\beta:\alpha} = \alpha \cdot (P_x)_{\beta:\alpha};$$

so daß jetzt ebenfalls $(P_x)_{\beta:\alpha}$ aus N_x d. h. aus ∂N_x gefunden werden kann, ohne P_x selbst entwickelt haben zu müssen.

§. 119. Zusatz.

Ist $$N_x = (x-a)(x-b) \cdot P'_x,$$

so ist $$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Q'_x}{P'_x},$$

---

*) $(\partial N_x)_a$ bedeutet hier und in der Folge immer, was aus ∂N_x wird, wenn a statt x gesetzt wird.

und dabei werden A und B auf nachstehende Art gefunden. Man findet nämlich zuerst

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{Q_x}{P_x},$$

indem man

$$A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a} \quad \text{und} \quad Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a} \quad \text{nimmt;}$$

während $N_x = (x-a) \cdot P_x$, also $P_x = (x-b)P'_x$ ist.

Hernach zerlegt man wieder

$$\frac{Q_x}{P_x} \text{ in } \frac{B}{x-b} + \frac{Q'_x}{P'_x},$$

$$B = \frac{(Q_x)_b}{(P'_x)_b} \quad \text{und} \quad Q'_x = \frac{Q_x - B \cdot P'_x}{x-b} \quad \text{nehmend.}$$

§. 120. Zusatz.

Man kann aber auch, zuerst, $(x-a) \cdot P'_x = R_x$, also $N = (x-b) \cdot R_x$ nehmend,

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{C}{x-b} + \frac{S_x}{R_x}$$

finden, indem man dem (§. 118.) zu Folge

$$C = \frac{(M_x)_b}{(R_x)_b} \quad \text{und} \quad S_x = \frac{M_x - C \cdot R_x}{x-b} \quad \text{nimmt,}$$

und dann wieder, weil $R_x = (x-a) \cdot P'_x$ ist,

$$\frac{S_x}{R_x} \text{ in } \frac{D}{x-a} + \frac{S'_x}{P'_x}$$

zerlegen, dadurch daß man

$$D = \frac{(S_x)_a}{(P'_x)_a} \quad \text{und} \quad S'_x = \frac{S_x - D \cdot P'_x}{x-a}$$

bestimmt.

Und dabei ist $A = D$, $B = C$ und $S'_x = Q'_x$, so daß beide Wege zu einem und demselben Endresultate führen.

Denn es ist

$$N_x = (x-a) \cdot P_x = (x-b) \cdot R_x,$$

also $P_x = (x-b) \cdot P'_x$ und $R_x = (x-a) \cdot P'_x$.

Da nun $\frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a} = Q_x$ ist, und $(P_x)_b = 0$;

so wird $(Q_x)_b = \frac{(M_x)_b}{b-a}$, also $B = \frac{(Q_x)_b}{(P'_x)_b} = \frac{(M_x)_b}{(b-a) \cdot (P'_x)_b}$,

während $C = \frac{(M_x)_b}{(R_x)_b}$, und $(R_x)_b = (b-a) \cdot (P'_x)_b$ ist;

deswegen ist nothwendig $B = C$.

Gerade so zeigt sich $A = D$, und dann ist nothwendig auch

$$Q'_x = \frac{M_x - [A(x-b) + B(x-a)] \cdot P'_x}{(x-a)(x-b)} = S'_x.$$

Anmerkung. Nach Anmerkung 1. zu (§. 118.) findet man auch

$$A = \frac{(M_x)_a}{(\partial N_x)_a}, \quad B = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b}.$$

Von A erhellet solches unmittelbar; von B in so ferne $B = C$ ist, und C offenbar nach (§. 118. Anmerk. 1.) so gefunden wird.

Man kann aber, daß $B = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b}$ seyn müsse, ohne (§. 120.) zu Hilfe zu nehmen, bloß aus (§. 119.) und zwar wie folgt erhalten. Es ist nämlich nach (§. 119.)

$$B = \frac{(Q_x)_b}{(P'_x)_b}, \text{ aber } Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a},$$

folglich, weil $P_x = (x-b) \cdot P'_x$, also $(P_x)_b = 0$ ist,

$(Q_x)_b = \frac{(M_x)_b}{b-a}$, demnach $B = \frac{(M_x)_b}{(b-a) \cdot (P'_x)_b}$, während

$$N_x = (x-a)(x-b) \cdot P'_x,$$

also $\partial N_x = (x-b) \cdot P'_x + (x-a) \cdot P'_x + (x-a)(x-b) \cdot \partial P'_x$,

also $(\partial N_x)_b = (b-a) \cdot (P'_x)_b$, also auch $B = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b}$ ist.

x^{m-n} und einer gebrochenen Funktion der beiden Veränderlichen u und v über.

Und ist noch überdies $m = n$, so fällt x ganz heraus.

5) Aehnliches läßt sich leicht von den ganzen und gebrochenen homogenen Funktionen von beliebig viel Veränderlichen hinstellen.

6) Setzt man ferner in einer ganzen oder gebrochenen homogenen Funktionen F, von beliebig viel Veränderlichen x, y, z, ..., und von der $m$ten Dimension (wo m eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 ist), xt statt x, yt statt y, zt statt z, u. s. w. f., so geht sie über in $t^m \cdot F$, so daß nämlich ist

$$F_{xt,yt,zt,\ldots} = t^m \cdot F_{x,y,z,\ldots}.$$

7) Wenn endlich eine irrationale Funktion zweier oder mehrer Veränderlichen, die in (6.) ausgesprochene Eigenschaft hat, so kann man diese Eigenschaft als den wahren Karakter ihrer Homogenität (als Definition derselben) feststellen, während früher (§. 111.) nur Beispiele dieser letztern gegeben worden sind.

§. 113. Zusatz.

Wird eine homogene ganze Funktion von 2 Veränderlichen

$$\underset{a+b=m}{S}[A_a \cdot x^a y^b] \quad \text{durch} \quad F_{x,y}$$

bezeichnet, so hat man:

1) $$\partial F_x = \underset{a+b=m}{S}[a \cdot A_a \cdot x^{a-1} \cdot y^b]$$

2) $$\partial F_y = \underset{a+b=m}{S}[b \cdot A_a \cdot x^a \cdot y^{b-1}];$$

folglich, wenn man (1.) mit x, (2.) aber mit y multiplizirt, und addirt

$$\partial F_x \cdot x + \partial F_y \cdot y = \underset{a+b=m}{S}[(a+b) A_a \cdot x^a \cdot y^b]$$

d. h.

3) $$\partial F_x \cdot x + \partial F_y \cdot y = m \cdot F_{x,y}.$$

Auf dieselbe Weise findet sich aber auch noch, wenn $F_{x,y,z}$

eine homogene ganze Funktion von der $m$ten Dimension dreier Veränderlichen x, y und z ist,

4) $\partial F_x \cdot x + \partial F_y \cdot y + \partial F_z \cdot z = m \cdot F_{x,y,z}$.

Und Aehnliches ergibt sich für die homogenen ganzen Funktionen von beliebig viel Veränderlichen.

§. 114. Zusatz.

Dieselben Sätze (§. 113. NN. 3. 4.) gelten aber auch noch, wenn F eine homogene gebrochene Funktion zweier oder mehrer Veränderlichen ist, von der $m$ten Dimension, mag m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null seyn. Ist nämlich φ eine ganze homogene Funktion der $p$ten Dimension, und ψ eine solche der $q$ten Dimension, also $F = \frac{\varphi}{\psi}$ eine gebrochene homogene Funktion der $p-q$ten oder der $m$ten Dimension, wenn $p-q = m$ gesetzt wird, so hat man

$$\partial F_x \cdot x = \frac{\psi \cdot \partial\varphi_x - \varphi \cdot \partial\psi_x}{\psi^2} \cdot x;$$

$$\partial F_y \cdot y = \frac{\psi \cdot \partial\varphi_y - \varphi \cdot \partial\psi_y}{\psi^2} \cdot y;$$

u. s. w. f.

Enthält nun F bloß die beiden Veränderlichen x und y, so findet sich

$$\partial F_x \cdot x + \partial F_y \cdot y = \frac{\psi \cdot (\partial\varphi_x \cdot x + \partial\varphi_y \cdot y) - \varphi \cdot (\partial\psi_x \cdot x + \partial\psi_y \cdot y)}{\psi^2}.$$

Nun ist aber auch für ganze homogene Funktionen

$$\partial\varphi_x \cdot x + \partial\varphi_y \cdot y = p \cdot \varphi,$$

und

$$\partial\psi_x \cdot x + \partial\psi_y \cdot y = q \cdot \psi;$$

folglich, wenn man diese Werthe oben substituirt:

$$\partial F_x \cdot x + \partial F_y \cdot y = (p-q) \cdot \frac{\varphi}{\psi} = m \cdot F;$$

wie solches (§. 113. N. 3.) für eine ganze homogene Funktion F bereits zu finden ist.

Und enthalten φ und ψ die 3 Veränderlichen x, y und z, so wird noch hinzugenommen

$$\partial F_z \cdot z = \frac{\psi \cdot \partial\psi_z - \varphi \cdot \partial\varphi_z}{\psi^2} \cdot z,$$

und es ergibt sich sogleich die Formel (§. 113. N. 4.) für gebrochene homogene Funktionen.

§. 115. Zusatz.

Nimmt man überhaupt von

$$1) \qquad F_{x,y} = S[A_a \cdot x^a y^b]_{a+b=m}$$

die $c$te Ableitung nach x, so erhält man

$$2) \qquad \partial^c F_x = S[a^{c|-1} \cdot A_a \cdot x^{a-c} \cdot y^b]_{a+b=m},$$

und hiervon wieder die $d$te Ableitung nach y;

$$3) \qquad \partial^{c,d} F_{x,y} = S[a^{c|-1} \cdot b^{d|-1} \cdot A_a \cdot a^{a-c} \cdot y^{b-d}]_{a+b=m},$$

welche Gleichung, wenn man noch links und rechts mit $\frac{(c+d)!}{c!\,d!} \cdot x^c \cdot y^d$ multiplizirt,

$$4) \quad \frac{(c+d)!}{c!\,d!} \cdot \partial^{c,d} F_{x,y} \cdot x^c \cdot y^d = (c+d)!\; S\left[\frac{a^{c|-1}}{c!} \cdot \frac{b^{d|-1}}{d!} A_a \cdot x^a \cdot y^b\right]_{a+b=m}$$

gibt.

Denkt man sich in dieser Gleichung nach und nach statt c und d, 0 und alle ganzen Zahlen gesetzt, welche jedoch der Gleichung $c+d=n$ entsprechen, und zuletzt alle diese Gleichungen zu einander addirt, so erhält man, weil (nach II. Th. §§. 410.—412.)

$$S\left[\frac{a^{c|-1}}{c!} \cdot \frac{b^{d|-1}}{d!}\right]_{c+d=n} = \frac{(a+b)^{n|-1}}{n!} \qquad \text{ist,}$$

$$5) \qquad S\left[\frac{(c+d)!}{c!\,d!} \cdot \partial^{c,d} F_{x,y} \cdot x^c \cdot y^d\right]_{c+d=n} = m^{n|-1} \cdot F_{x,y};$$

in welcher allgemeinen Formel der spezielle Fall des (§. 113. N. 3.) liegt, wenn $n = 1$ gesetzt wird.

Und leicht läßt sich auf ähnlichem Wege noch finden, daß wenn F eine homogene ganze Funktion dreier Veränderlichen x, y, z, von der mten Dimension ist, dann

$$6)\quad S\left[\frac{(a+b+c)!}{a!\ b!\ c!}\cdot\partial^{a,b,c}F_{x,y,z}\cdot x^a y^b z^c\right]_{a+b+c=n} = m^{n|-1}\cdot F_{x,y,z}$$

seyn werde, welche allgemeinere Formel den speziellen Fall der (§. 113. N. 4.), für $n = 1$, in sich schließt.

Anmerkung. Setzt man in den vorstehenden Formeln statt der Faktoren x, y, z, die Differenzialien dx, dy, dz, so sind die Ausdrücke zur Linken, weil

$$\partial^{a,b}F_{x,y} = \frac{d^{a+b}F}{dx^a\cdot dy^b},$$

und

$$\partial^{a,b,c}F_{x,y,z} = \frac{d^{a+b+c}F}{dx^a\cdot dy^b\cdot dz^c}$$

ist, nichts anders als die vollständigen Differenzialien d^nF. — Umgekehrt also erhält man $m\cdot F$ wenn man in dem Differenzial dF, d. h. $\frac{dF}{dx}\cdot dx + \frac{dF}{dy}\cdot dy$ oder $\frac{dF}{dx}\cdot dx + \frac{dF}{dy}\cdot dy + \frac{dF}{dz}\cdot dz$, statt der Faktoren dx, dy, dz, die Veränderlichen x, y, z, selbst setzt, (§. 113. NN. 3. 4.). Und eben so erhält man $m^{n|-1}\cdot F$, sobald man d^nF entwickelt, und dann x, y, z, statt der Faktoren dx, dy, dz setzt.

§. 116. Zusatz.

Diese in den (§§. 113.—115.) entwickelten merkwürdigen Eigenschaften der homogenen Funktionen, lassen sich auch noch auf folgendem Wege erhalten:

Ist nämlich F eine beliebige homogene ganze oder gebrochene oder irrationale Funktion von der mten Dimension, von beliebig viel Veränderlichen x, y, z, rc. rc., wo m eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, und setzt man in ihr xt, yt,

zt, ꝛc. ꝛc. statt x, y, z, so erhält man, den (§. 112. NN. 6. 7.) zu Folge:

$$1)\quad F_{xt,yt,zt,\dots} = t^m\cdot F_{x,y,z,\dots},$$

oder wenn $1+h$ statt t gesetzt wird,

$$2)\quad F_{x+hx,y+hy,z+hz,\dots} = (1+h)^m\cdot F_{x,y,z,\dots}.$$

Nun ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze für beliebig viel Veränderliche (III. Th. §. 30.), hx, hy, hz, ... statt Δx, Δy, Δz, ... setzend:

$$3)\quad F_{x+hx,y+hy,z+hz,\dots} = S\left[\partial^{a,b,c,\dots}F_{x,y,z,\dots}\cdot\frac{x^a}{a!}\cdot\frac{y^b}{b!}\cdot\frac{z^c}{c!}\cdots h^p\right]_{a+b+c+\dots=p},$$

während nach dem binomischen Lehrsatze (§. 402. des II. Th.)

$$4)\quad (1+h)^m = S\left[\frac{m^{p|-1}}{p!}\cdot h^p\right]$$

seyn wird. — Substituirt man aber diese Werthe in (2.), so erhält man zwei nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihen, welche einander gleich seyn müssen, und in welchen daher auch die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von h beziehlich einander gleich sind, also namentlich, wenn n statt p gesetzt wird, die Koeffizienten von h^n; und dies gibt

$$5)\quad S\left[\partial^{a,b,c,\dots}F_{x,y,z,\dots}\cdot\frac{x^a}{a!}\cdot\frac{y^b}{b!}\cdot\frac{z^c}{c!}\cdots\right]_{a+b+c+\dots=n} = \frac{m^{n|-1}}{n!}\cdot F_{x,y,z,\dots},$$

welche Formel, wenn man auf jeder Seite mit n! multiplizirt, die Formeln (§. 113. NN. 3. 4. und §. 115. NN. 5. 6.) in sich schließt, aber nicht bloß für ganze sondern auch für gebrochene und irrationale homogene Funktionen von der mten Dimension gilt, deshalb allgemeiner ist, als die im (§. 115.) hingestellten.

Zweite Abtheilung.

Von der Zerlegung der ächt gebrochenen algebraischen Funktionen in ihre Parzial-Brüche.

§. 117. Aufgabe.

Es ist $\frac{M}{N}$ eine ächt gebrochene Funktion von x, und $N = (ax - b) \cdot P$, dabei N vom Grade n, also P vom Grade $n - 1$; man soll $\frac{M}{N}$ in die beiden Parzial-Brüche $\frac{A}{ax - b} + \frac{Q}{P}$ zerlegen.

Auflösung.

Man setze statt Q eine ganze Funktion vom Grade $n - 2$, mit $n - 1$ unbestimmten Koeffizienten, während A ebenfalls unbestimmt, aber konstant ist. — Aus der Gleichung

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{ax - b} + \frac{Q}{P}$$

entwickle man:

$$M = AP + (ax - b) \cdot Q$$

und erhält dann, nach (§§. 425.—427. d. II. Th.), n Gleichungen, welche im allgemeinen, da sie in Bezug auf die n Unbestimmten, einfache sind, zur Bestimmung derselben dienen werden; obgleich in besondern Fällen diese n Gleichungen sich auch zum Theil widersprechen und dann die Unmöglichkeit der Aufgabe ausdrücken können.

Die Aufgabe ist daher im allgemeinen möglich, kann dagegen in besondern Fällen unmöglich seyn. *)

---

*) Diese Redensart hier, und so oft sie vorkommt, soll nichts anders sagen, als daß, so lange die Zahlzeichen ganz allgemein sind, ihnen solche Werthe beigelegt werden können, für welche die Aufgabe möglich wird, daß sie aber nicht nothwendig für jeden Werth der allgemeinen Ausdrücke möglich seyn muß.

Anmerkung. Da, wenn

$$M = A_0 \cdot x^m + A_1 \cdot x^{m-1} + A_2 \cdot x^{m-2} + \ldots + A_m$$

und $N = B_0 \cdot x^n + B_1 \cdot x^{n-1} + B_2 \cdot x^{n-2} + \ldots + B_n$

ist, sogleich

$$\frac{M}{N} = \frac{A_0}{B_0} \cdot \frac{x^m + \frac{A_1}{A_0} \cdot x^{m-1} + \frac{A_2}{A_0} \cdot x^{m-2} + \ldots + \frac{A_m}{A_0}}{x^n + \frac{B_1}{B_0} \cdot x^{n-1} + \frac{B_2}{B_0} \cdot x^{n-2} + \ldots + \frac{B_n}{B_0}},$$

geschrieben werden kann, so kann man im Folgenden allemal die höchsten Potenzen von x ohne andere Koeffizienten (als 1) voraussetzen, so daß die Faktoren die Form $x-a$, $x-b$, $x-c$, rc. annehmen.

§. 118. Lehrsatz.

Ist $\frac{M_x}{N_x}$ eine ächt gebrochene Funktion von x, und $N_x = (x-a) \cdot P_x$, so läßt sich allemal wirklich

$$\frac{M_x}{N_x} \text{ in } \frac{A}{x-a} + \frac{Q_x}{P_x}$$

zerlegen, wenn nur $x-a$ kein Theiler von P_x ist.

Und dabei ist allemal

$$A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a},$$

unter $(M_x)_a$ und $(P_x)_a$ das verstanden, was aus M_x und P_x wird, wenn a statt x gesetzt wird; und Q_x ist allemal vom niedrigern Grade als P_x.

Beweis. Soll nämlich

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{Q_x}{P_x}$$

werden, so müßte

$$M_x = A \cdot P_x + (x-a) \cdot Q_x,$$

also
$$Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a}$$

werden, folglich $M_x - A \cdot P_x$ durch $x-a$ theilbar seyn, mithin für $x = a$ Null werden. — Umgekehrt aber, ist $(M_x)_a - A \cdot (P_x)_a = 0$, also $A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a}$, so ist auch $M_x - A \cdot P_x$ durch $x-a$ theilbar, nach (II. Th. §. 433.); folglich Q_x möglich, so oft A möglich ist, d. h. so oft $(P_x)_a$ nicht Null ist, d. h. so oft P_x nicht mehr durch $x-a$ theilbar ist.

Anmerkung 1. Weil aber

$$N_x = (x-a) \cdot P_x$$

ist, so hat man auch, nach (§. 99.):

$$(\partial N_x)_a \text{ *)} = (P_x)_a,$$

so daß man $(P_x)_a$ direkt aus dem gegebenen Nenner N_x finden kann, ohne P_x selbst haben zu müssen.

Anmerkung 2. Wäre $N_x = (\alpha x - \beta) \cdot P_x$, so hätte man $\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{\alpha x - \beta} + \frac{Q_x}{P_x}$, also $Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{\alpha x - \beta}$, also $(M_x)_{\beta:\alpha} - A \cdot (P_x)_{\beta:\alpha} = 0$, woraus A bestimmt wird, während dann Q_x von selbst sich ergibt.

Da ferner jetzt

$$N_x = (\alpha x - \beta) \cdot P_x = \left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \alpha P_x$$

ist, so hat man nun

$$(\partial N_x)_{\beta:\alpha} = \alpha \cdot (P_x)_{\beta:\alpha};$$

so daß jetzt ebenfalls $(P_x)_{\beta:\alpha}$ aus N_x d. h. aus ∂N_x gefunden werden kann, ohne P_x selbst entwickelt haben zu müssen.

§. 119. Zusatz.

Ist $$N_x = (x-a)(x-b) \cdot P'_x,$$

so ist $$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{Q'_x}{P'_x},$$

---

*) $(\partial N_x)_a$ bedeutet hier und in der Folge immer, was aus ∂N_x wird, wenn a statt x gesetzt wird.

und dabei werden A und B auf nachstehende Art gefunden. Man findet nämlich zuerst

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{Q_x}{P_x},$$

indem man

$$A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a} \quad \text{und} \quad Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a} \qquad \text{nimmt;}$$

während $N_x = (x-a) \cdot P_x$, also $P_x = (x-b) P'_x$ ist.

Hernach zerlegt man wieder

$$\frac{Q_x}{P_x} \text{ in } \frac{B}{x-b} + \frac{Q'_x}{P'_x},$$

$$B = \frac{(Q_x)_b}{(P'_x)_b} \quad \text{und} \quad Q'_x = \frac{Q_x - B \cdot P'_x}{x-b} \text{ nehmend.}$$

§. 120. Zusatz.

Man kann aber auch zuerst, $(x-a) \cdot P'_x = R_x$, also

$$N = (x-b) \cdot R_x \qquad \text{nehmend,}$$

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{C}{x-b} + \frac{S_x}{R_x}$$

finden, indem man dem (§. 118.) zu Folge

$$C = \frac{(M_x)_b}{(R_x)_b} \quad \text{und} \quad S_x = \frac{M_x - C \cdot R_x}{x-b} \qquad \text{nimmt,}$$

und dann wieder, weil $R_x = (x-a) \cdot P'_x$ ist,

$$\frac{S_x}{R_x} \text{ in } \frac{D}{x-a} + \frac{S'_x}{P'_x}$$

zerlegen, dadurch daß man

$$D = \frac{(S_x)_a}{(P'_x)_a} \quad \text{und} \quad S'_x = \frac{S_x - D \cdot P'_x}{x-a}$$

bestimmt.

Und dabei ist $A = D$, $B = C$ und $S'_x = Q'_x$, so daß beide Wege zu einem und demselben Endresultate führen.

Denn es ist

$$N_x = (x-a) \cdot P_x = (x-b) \cdot R_x,$$

also $P_x = (x-b) \cdot P'_x$ und $R_x = (x-a) \cdot P'_x$.

Da nun $\frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a} = Q_x$ ist, und $(P_x)_b = 0$;

so wird $(Q_x)_b = \frac{(M_x)_b}{b-a}$, also $B = \frac{(Q_x)_b}{(P'_x)_b} = \frac{(M_x)_b}{(b-a) \cdot (P'_x)_b}$,

während $C = \frac{(M_x)_b}{(R_x)_b}$, und $(R_x)_b = (b-a) \cdot (P'_x)_b$ ist;

deswegen ist nothwendig $B = C$.

Gerade so zeigt sich $A = D$, und dann ist nothwendig auch

$$Q'_x = \frac{M_x - [A(x-b) + B(x-a)] \cdot P'_x}{(x-a)(x-b)} = S'_x.$$

Anmerkung. Nach Anmerkung 1. zu (§. 118.) findet man auch

$$A = \frac{(M_x)_a}{(\partial N_x)_a}, \quad B = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b}.$$

Von A erhellet solches unmittelbar; von B in so ferne $B = C$ ist, und C offenbar nach (§. 118. Anmerk. 1.) so gefunden wird.

Man kann aber, daß $B = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b}$ seyn müsse, ohne (§. 120.) zu Hilfe zu nehmen, bloß aus (§. 119.) und zwar wie folgt erhalten. Es ist nämlich nach (§. 119.)

$$B = \frac{(Q_x)_b}{(P'_x)_b}, \text{ aber } Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a},$$

folglich, weil $P_x = (x-b) \cdot P'_x$, also $(P_x)_b = 0$ ist,

$(Q_x)_b = \frac{(M_x)_b}{b-a}$, demnach $B = \frac{(M_x)_b}{(b-a) \cdot (P'_x)_b}$, während

$$N_x = (x-a)(x-b) \cdot P'_x,$$

also $\partial N_x = (x-b) \cdot P'_x + (x-a) \cdot P'_x + (x-a)(x-b) \cdot \partial P'_x$,

also $(\partial N_x)_b = (b-a) \cdot (P'_x)_b$, also auch $B = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b}$ ist.

§. 121. Zusatz.

Aus diesen Sätzen folgt aber nun sehr leicht:

Ist $N_x = (x-a)(x-b)(x-c)(x-p)$,

so ist

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c} + \frac{D}{x-p};$$

und es werden dabei gefunden

$$A = \frac{(M_x)_a}{(a-b)(a-c)(a-p)} \quad \text{oder} \quad = \frac{(M_x)_a}{(\partial N_x)_a};$$

$$B = \frac{(M_x)_b}{(b-a)(b-c)(b-p)} \quad \text{oder} \quad = \frac{(M_x)_b}{(\partial N_x)_b};$$

$$C = \frac{(M_x)_c}{(c-a)(c-b)(c-p)} \quad \text{oder} \quad = \frac{(M_x)_c}{(\partial N_x)_c};$$

$$D = \frac{(M_x)_p}{(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{oder} \quad = \frac{(M_x)_p}{(\partial N_x)_p}.$$

Und Aehnliches findet sich, wenn der Nenner N_x ein Produkt von beliebig vielen, aber einander ungleichen einfachen Faktoren von der Form $x-\alpha$ seyn sollte.

Beispiele.

Soll die gebrochene Funktion

$$\frac{2x^2-3x+1}{2x^3+3x^2-2x} \quad \text{d. h.} \quad \frac{x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{x^3+\frac{3}{2}x^2-x},$$

wo $x^3+\frac{3}{2}x^2-x = x(x-\frac{1}{2})(x+2)$ ist,

in die Parzial-Brüche

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}} + \frac{C}{x+2}$$

zerlegt werden, so hat man

$$M_x = x^2-\tfrac{3}{2}x+\tfrac{1}{2},$$

$$N_x = x^3+\tfrac{3}{2}x^2-x,$$

$$\partial N_x = 3x^2+3x-1;$$

folglich

$$A = \frac{(M_x)_0}{(\partial N_x)_0} = \frac{\frac{1}{2}}{-1} = -\tfrac{1}{2};$$

$$B = \frac{(M_x)_{\frac{1}{2}}}{(\partial N_x)_{\frac{1}{2}}} = \frac{0}{(\frac{5}{4})} = 0;$$

und
$$C = \frac{(M_x)_{-2}}{(\partial N_x)_{-2}} = \frac{7\frac{1}{2}}{5} = \frac{3}{2};$$

so daß man findet

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{-\frac{1}{2}}{x} + \frac{0}{x-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{x+2} = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x+4}.$$

Man könnte dieses Resultat noch leichter erhalten, wenn man bedachte, daß sich die gegebene gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$ durch $2x-1$ oder $x-\frac{1}{2}$ heben läßt, daß daher

$$\frac{M}{N} = \frac{x-1}{x(x+2)}$$

gefunden wird; denn dann hatte man

$$M_x = x-1,$$
$$N_x = x^2+2x,$$
$$\partial N_x = 2x+2;$$

also, wenn $\frac{M}{N} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$ gesetzt wurde,

$$A = \frac{(M_x)_0}{(\partial N_x)_0} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2},$$

und
$$B = \frac{(M_x)_{-2}}{(\partial N_x)_{-2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2};$$

also
$$\frac{M}{N} = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x+4}.$$

Wollte man dieselbe gebrochene Funktion

$$\frac{2x^2-3x+1}{2x^3+3x^2-2x}$$

nach Anleitung des (§. 119.) in ihre Parzial-Brüche $\frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2}$ zerlegen, so hätte man

$$M_x = 2x^2-3x+1, \qquad N_x = 2x^3+3x^2-2x;$$

also, $\frac{M}{N} = \frac{A}{x} + \frac{Q_x}{P_x}$ setzend,

$$P_x = 2x^2 + 3x - 2, \qquad A = \frac{(M_x)_0}{(P_x)_0} = -\tfrac{1}{2},$$

und $$Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x} = 3x - \tfrac{3}{2};$$

also $$\frac{M_x}{N_x} = -\frac{1}{2x} + \frac{3x - \frac{3}{2}}{(2x-1)\,(x+2)}.$$

Nun ist $P'_x = x+2$, also

$$B = \frac{(Q_x)_{\frac{1}{2}}}{(P'_x)_{\frac{1}{2}}} = \frac{0}{2\frac{1}{2}} = 0,$$

und $$Q'_x = \frac{Q_x - B \cdot P'_x}{2x-1} = \frac{Q_x}{2x-1} = \tfrac{3}{2};$$

also $$\frac{M_x}{N_x} = -\frac{1}{2x} + \frac{3}{2(x+2)};$$ wie vorhin.

§. 122. Lehrsatz.

Ist in einer ächt gebrochenen Funktion $\frac{M_x}{N_x}$ der Nenner N_x von der Form

$$N_x = (x-a)^3 \cdot P_x,$$

so daß P_x den Faktor $x-a$ nicht mehr hat, so läßt sich allemal $\frac{M_x}{N_x}$ in die Parzial-Brüche

$$\frac{A}{(x-a)^3} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-a} + \frac{S_x}{P_x}$$

zerlegen, und zwar findet sich allemal

$$A = \frac{(M_x)_a}{(P_x)_a}, \qquad Q_x = \frac{M_x - A \cdot P_x}{x-a};$$

$$B = \frac{(Q_x)_a}{(P_x)_a}, \qquad R_x = \frac{Q_x - B \cdot P_x}{x-a};$$

$$C = \frac{(R_x)_a}{(P_x)_a}, \qquad S_x = \frac{R_x - C \cdot P_x}{x-a}.$$

Beweis. Denn es ist

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{1}{(x-a)^2} \cdot \frac{M_x}{(x-a) \cdot P_x};$$

aber nach (§. 119.)

$$\frac{M_x}{(x-a)\cdot P_x} = \frac{A}{x-a} + \frac{Q_x}{P_x},$$

wo A und Q, wie im Lehrsatze steht, gefunden werden müssen; also ist

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A}{(x-a)^3} + \frac{Q_x}{(x-a)^2\cdot P_x}.$$

Setzt man nun

$$\frac{Q_x}{(x-a)^2\cdot P_x} = \frac{1}{x-a}\cdot\frac{Q_x}{(x-a)\cdot P_x},$$

so hat man wiederum nach (§. 119.)

$$\frac{Q_x}{(x-a)\cdot P_x} = \frac{B}{x-a} + \frac{R_x}{P_x},$$

wo B und R_x, wie im Lehrsatze steht, gefunden werden; demnach ist

$$\frac{Q_x}{(x-a)^2\cdot P_x} = \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{R_x}{(x-a)\cdot P_x}.$$

u. s. w. f.

Anmerkung 1. Es ist aber in die Augen fallend, wie solches auf beliebig viel gleiche einfache Faktoren, welche der Nenner N_x haben mag, ausgedehnt werden kann.

Anmerkung 2. Nimmt man die Ableitungen zu Hilfe, so kann man auch bei dieser Aufgabe weit leichter zum Ziele gelangen. — Soll nämlich, wenn $N = (\alpha x-\beta)^\nu\cdot P$ ist,

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{(\alpha x-\beta)^\nu} + \frac{B}{(\alpha x-\beta)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{H}{\alpha x-\beta} + \frac{S}{P}$$

seyn, so findet sich hieraus:

$$S = \frac{M - AP - B(\alpha x-\beta)P - C(\alpha x-\beta)^2 P \cdots - H(\alpha x-\beta)^{\nu-1}P}{(\alpha x-\beta)^\nu},$$

so daß der Zähler zur Rechten durch $(\alpha x-\beta)^\nu$ theilbar seyn, also die Form

$$(\alpha x-\beta)^\nu\cdot f_x \quad \text{oder} \quad \left(x-\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu\cdot\varphi_x$$

haben muß. — Ist daher dieser Zähler

$M - AP - B(\alpha x - \beta) \cdot P - C(\alpha x - \beta)^2 \cdot P \cdots - H(\alpha x - \beta)^{\nu - 1} \cdot P$ durch Z bezeichnet, so müssen nach (§. 99. II.) die Ableitungen ∂Z, $\partial^2 Z$, $\partial^3 Z \cdots$ bis $\partial^{\nu-1} Z$, alle so wie Z selbst, der Null gleich werden, sobald man in ihnen $\alpha x - \beta = 0$ oder $x = \frac{\beta}{\alpha}$ setzt. Man hat daher die ν Gleichungen

$$\odot \; Z = 0, \quad (\partial Z) = 0, \quad (\partial^2 Z) = 0, \cdots (\partial^{\nu-1} Z) = 0,$$

aus denen sich dann die Werthe von A, B, C, ... H, finden lassen. — Erinnert man sich aber des Satzes (§. 99. II.), daß nämlich, wenn

$$\psi_x = (\alpha x - \beta)^n \cdot P = \left(x - \frac{\beta}{\alpha}\right)^n \cdot (\alpha^n \cdot P) \qquad \text{ist,}$$

dann, für $\alpha x - \beta = 0$ oder $x = \frac{\beta}{\alpha}$,

$$(\partial^\mu \psi_x) = 0, \quad \text{wenn } \mu < n,$$

$$(\partial^n \psi_x) = n! \; \alpha^n \cdot (P) \; {}^{*)}$$

$$\text{und } (\partial^\mu \psi_x) = \mu^{n|-1} \cdot \alpha^n \cdot (\partial^{\mu-n} P), \quad \text{wenn } \mu > n,$$

seyn müsse, so werden diese Gleichungen $\odot$ übergehen in

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} (M) - A(P) = 0, \\ (\partial M) - A(\partial P) - \alpha B(P) = 0, \\ (\partial^2 M) - A(\partial^2 P) - 2^{1|-1} \alpha B(\partial P) - 2^{2|-1} \alpha^2 C(P) = 0, \\ (\partial^3 M) - A(\partial^3 P) - 3^{1|-1} \alpha B(\partial^2 P) - 3^{2|-1} \alpha^2 C(\partial P) \\ \qquad\qquad - 3^{3|-1} \alpha^3 D(P) = 0, \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

und diese sind zur Bestimmung der Konstanten A, B, C, ... H, sehr bequem.

Weil aber P den Faktor $\alpha x - \beta$ nicht mehr enthält, so werden auch die $\nu - 1$ ersten Ableitungen von $\frac{Z}{P}$ für $\alpha x - \beta = 0$,

---

*) Die Klammern, deren Zweck nicht in die Augen fällt, sollen hier durchaus andeuten, daß überall in den durch sie eingeklammerten Ausdrücken, $\frac{\beta}{\alpha}$ statt x gesetzt worden ist.

nothwendig der Null gleich, folglich hat man noch die ν Gleichungen

$$(\mathfrak{C})\left(\frac{Z}{P}\right)=0,\ \left(\partial\frac{Z}{P}\right)=0,\ \left(\partial^2\frac{Z}{P}\right)=0,\ldots\left(\partial^{\nu-1}\frac{Z}{P}\right)=0,$$

welche ebenfalls zur Bestimmung der ν Konstanten A, B, C, ... H dienen werden. — In so ferne

$$\frac{Z}{P}=\frac{M}{P}-A-B(\alpha x-\beta)-C(\alpha x-\beta)^2\ldots-H(\alpha x-\beta)^{\nu-1}$$

ist, so werden diese ν Gleichungen ($\mathfrak{C}$), nach (§. 99. II.) in folgende übergehen:

$$\text{II.}\begin{cases}\left(\frac{M}{P}\right)-A=0,\\ \left(\partial\frac{M}{P}\right)-\alpha B=0,\\ \left(\partial^2\frac{M}{P}\right)-2!\alpha^2 C=0,\\ \left(\partial^3\frac{M}{P}\right)-3!\alpha^3 D=0,\\ \vdots \qquad \vdots\\ \left(\partial^{\nu-1}\frac{M}{P}\right)-(\nu-1)!\,\alpha^{\nu-1}H=0;\end{cases}$$

und so ausgedrückt geben sie unmittelbar die ν Konstanten A, B, C, ... H. *)

Beispiel. Man soll die gebrochene Funktion

$$\frac{2x^3-4x^2-x+2}{2x^4+3x^3-3x^2-7x-3} \text{ oder } \frac{2x^3-4x^2-x+2}{(x+1)^3(2x-3)}$$

in Parzial-Brüche zerlegen von der Form

*) In allen diesen Gleichungen drücken die Klammern, in welche die Funktionen M, ∂M, ꝛc., P, ∂P, ꝛc. $\frac{M}{P}$, $\partial\frac{M}{P}$, ꝛc. eingeschlossen sind, allemal aus, daß in diesen Funktionen $\frac{\beta}{\alpha}$ statt x gesetzt ist, alle diese Ausdrücke selbst also dadurch nach x konstant sind.

Es seyen die Parzial-Brüche vorgestellt durch

$$\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x}+\frac{D}{(x-1)^2}+\frac{E}{x-1}+\frac{F}{2x-1}+\frac{G}{x+1},$$

und die Konstanten A, B, C, D, E, F und G, zu finden.

Um A, B, C, nach (§. 122. Anmerkung 2.) zu finden, hat man:

$$M = 2x^2-3x+1; \quad \text{und} \quad P = 2x^4-3x^3-x^2+3x-1;$$
$$\partial M = 4x-3; \qquad \partial P = 8x^3-9x^2-2x+3;$$
$$\partial^2 M = 4; \qquad \partial^2 P = 24x^2-18x-2;$$

also für $x = 0$,

$$(M) = 1, \quad \text{und} \quad (P) = -1,$$
$$(\partial M) = -3, \qquad (\partial P) = 3,$$
$$(\partial^2 M) = 4, \qquad (\partial^2 P) = -2;$$

und die Gleichungen (I.) werden für diesen Fall

$$1+A = 0,$$
$$-3-3A+B = 0,$$
$$4+2A-6B+2C = 0;$$

woraus folgt:

$$A = -1, \quad B = 0, \quad C = -1.$$

Um D und E zu finden, hat man:

$$M = 2x^2-3x+1, \quad \text{und} \quad P = 2x^5+x^4-x^3,$$
$$\partial M = 4x-3, \qquad \partial P = 10x^4+4x^3-3x^2;$$

folglich für $x = 1$,

$$(M) = 0, \quad \text{und} \quad (P) = 2,$$
$$(\partial M) = 1, \qquad (\partial P) = 11;$$

und die Gleichungen (I.) sind für diesen Fall

$$-2D = 0,$$
$$1-11D-2E = 0;$$

woraus $D = 0$ und $E = \frac{1}{2}$.

Für F hat man nach (§. 119.)

$$P = x^3\cdot(x-1)^2\cdot(x+1)$$

und $F = \frac{(M)}{(P)}$ für $2x-1 = 0$; d. h. $F = 0$.

Endlich hat man in Bezug auf G nach (§. 119.)

$$P = x^3 \cdot (x-1)^2 \cdot (2x-1)$$

und dabei $G = \frac{(M)}{(P)}$ für $x = -1$, d. h. $G = \frac{1}{2}$;

und die gesuchten Parzial-Brüche sind daher:

$$\frac{-1}{x^3}, \quad \frac{-1}{x}, \quad \frac{\frac{1}{2}}{x-1}, \quad \frac{\frac{1}{2}}{x+1},$$

deren Summe der gegebenen gebrochenen Funktion

$$\frac{2x^2-3x+1}{x^3(x-1)^2(2x-1)(x+1)}$$

gleich seyn muß.

Man hätte aber dasselbe Resultat, für diesen Fall, viel leichter noch erhalten, wenn man bedacht hätte, daß

$$2x^2-3x+1 = (2x-1)(x-1),$$

und daß daher die gegebene gebrochene Funktion, dieser andern

$$\frac{1}{x^3(x-1)(x+1)} \quad \text{gleich ist.}$$

§. 125. Aufgabe.

Es sey $\frac{M}{N}$ eine ächt gebrochene Funktion von x, und $N = (ax^2+bx+c) \cdot P$, dabei vom $n$ten Grade, man soll die Funktion $\frac{M}{N}$ in Parzial-Brüche zerlegen von der Form

$$\frac{Q}{ax^2+bx+c} + \frac{R}{P}.$$

Auflösung.

Da P vom $n-2$ten Grade ist, so ist R im allgemeinen vom $n-3$ten Grade, so wie Q vom ersten Grade. Man setze daher $Ax+B$ statt Q, und eben so eine ganze Funktion vom Grade $n-3$ mit $n-2$ unbestimmten Koeffizienten statt R, entwickle aus der Gleichung:

$$\frac{M}{N} = \frac{Q}{ax^2+bx+c} + \frac{R}{P}$$

diese andere: $M = QP + (ax^2+bx+c)R$,

verwandle in dieser den Ausdruck rechts in eine ganze Funktion,

die im allgemeinen vom Grade $n-1$ seyn muß, und erhält dann (II. Th. §§. 425.—429.) n Gleichungen, die zur Bestimmung der n Unbekannten dienen können.

Die Aufgabe ist daher möglich, wenn diese n Gleichungen die Unbekannten wirklich bestimmen; und sie ist nicht möglich, wenn diese Gleichungen in einem besondern Fall einen Widerspruch enthalten.

§. 126. Zusatz.

Ist der Faktor ax^2+bx+c ein quadratischer, d. h. sind die beiden einfachen Faktoren, die er selbst wieder hat, nicht verschieden, so daß solcher

$$=(\alpha x+\beta)^2$$

gesetzt werden kann, so ist nach (§. 122.)

$$\frac{M}{N}=\frac{A}{(\alpha x+\beta)^2}+\frac{B}{\alpha x+\beta}+\frac{Q}{P},$$

wo A und B konstant sind. Dann ist aber auch

$$\frac{M}{N}=\frac{A+B(\alpha x+\beta)}{(\alpha x+\beta)^2}+\frac{Q}{P}$$

$$=\frac{\alpha B\cdot x+(A+\beta B)}{ax^2+bx+c}+\frac{Q}{P};$$

und es ist daher die Aufgabe (§. 125.) in diesem Falle immer möglich, wenn nur P den Faktor $\alpha x+\beta$ nicht mehr hat.

§. 127. Lehrsatz.

Unter denselben Voraussetzungen wie (§. 125.) ist es allemal möglich, die beiden Konstanten A und B, so wie die ganze Funktion Q so zu bestimmen, daß

$$\frac{M}{N}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Q}{P}$$ ist,

wenn nur P für keinen der beiden aus der Gleichung

$$ax^2+bx+c=0$$

gezogenen Werthe von x zu Null wird, d. h. wenn nur P nicht

den doppelten Faktor ax^2+bx+c, und auch keinen der beiden in diesem doppelten Faktor enthaltenen einfachen Faktoren mehr enthält. — Dabei werden, im Falle ax^2+bx+c kein quadratischer Faktor ist, die Konstanten A und B dadurch gefunden, daß man in

$$M-(Ax+B)P$$

statt x nach einander die beiden aus

$$ax^2+bx+c=0$$

gezogenen Werthe von x, die durch x' und x'' bezeichnet seyn mögen, substituirt, die Resultate der Null gleich setzt, und die beiden dadurch hervorgehenden Gleichungen, welche

$$(M)'-(A\cdot x'+B)\cdot(P)'=0,$$
$$(M)''-(A\cdot x''+B)\cdot(P)''=0$$

seyn mögen, nach A und B auflöst, so daß

$$A=\frac{\frac{(M)'}{(P)'}-\frac{(M)''}{(P)''}}{x'-x''} \quad \text{und} \quad B=\frac{\frac{(M)''\cdot x'}{(P)''}-\frac{(M)'\cdot x''}{(P)'}}{x'-x''}$$

wird.

Beweis. Denn soll

$$\frac{M}{N}=\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}+\frac{Q}{P}$$

seyn, so ist auch:

$$Q=\frac{M-(Ax+B)P}{ax^2+bx+c},$$

und es muß daher $M-(Ax+B)P$ durch ax^2+bx+c theilbar seyn, folglich für x' und x'' statt x, der Null gleich werden. — Daher muß

$$(M)'-(A\cdot x'+B)\cdot(P)'=0 \quad \text{und} \quad (M)''-(A\cdot x''+B)\cdot(P)''=0$$

seyn; und weil diese beiden Gleichungen allemal nothwendig A und B bestimmen, wenn nicht $x'=x''$, und nicht $(P)'$ und auch nicht $(P)''$ der Null gleich ist, d. h. wenn der Faktor

$$ax^2+bx+c$$

kein quadratischer Faktor ist, und P weder den Faktor $x-x'$, noch den andern $x-x''$ mehr enthält, so ist die Aufgabe unter diesen Vor-

aussetzungen, allemal möglich; wenn für diese Werthe von A und B, Q allemal eine ganze Funktion wird, die dabei von einem niedrigern Grade als P ist.

Weil aber A und B so genommen sind, daß $M-(Ax+B)\cdot P$ sowohl für $x=x'$, als auch für $x=x''$, jedesmal zu Null wird, so ist $M-(Ax+B)\cdot P$ nothwendig durch $x-x'$ und auch durch $x-x''$ theilbar, folglich auch dann, wenn nicht $x'=x''$ ist, durch den doppelten Faktor $(x-x')(x-x'')$ oder ax^2+bx+c theilbar, woraus das Nöthige hervorgeht.

Beispiel. Es seyen die Parzial-Brüche zu finden, in welche die gebrochene Funktion

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)(x^2+1)}$$

zerlegt werden kann.

Die gesuchten Parzial-Brüche haben die Form

$$\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Q}{x^2+1}.$$

Die Gleichung $x^2+x+1=0$, gibt aufgelöst

$$x'=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}=\tfrac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\ ^{*})$$

und

$$x''=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}=-\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}).$$

Ferner ist $M=x+1$, $P=x^2+1$;

daher $(M)'=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$ und $(P)'=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$,

$(M)''=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$, $(P)''=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$,

wo $\sqrt{3}$ jedesmal ihren absoluten Werth vorstellt.

Also ist, weil $x'-x''=i\sqrt{3}$, nach dem Lehrsatz sogleich

$$A=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right):i\sqrt{3}=1,$$

und

$$B=\left(\frac{-\frac{1}{4}(1-i\sqrt{3})^2}{\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})}+\frac{\frac{1}{4}(1+i\sqrt{3})^2}{\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})}\right):i\sqrt{3}$$

$$=\left(\tfrac{1}{8}(1+i\sqrt{3})^3-\tfrac{1}{8}(1-i\sqrt{3})^3\right):i\sqrt{3}=0,$$

und

$$Q=\frac{M-(Ax+B)P}{x^2+x+1}=\frac{-x^3+1}{x^2+x+1}=-x+1;$$

---

*) Unter i eine der beiden Formen der $\sqrt{-1}$ verstanden, so daß $-i$ die andere ist. — Deshalb kann, wo i steht, durchaus auch $-i$ gesetzt werden.

folglich die gesuchten Parzial-Brüche selbst

$$\frac{x}{x^2+x+2} \quad \text{und} \quad \frac{-x+1}{x^2+1}.$$

Anmerkung. Man kann auch $(P)'$ und $(P)''$ finden, ohne P selbst zu kennen, wenn man die Sätze der Ableitungen anwendet.

Es ist nämlich

$$N = (ax^2+bx+c)\cdot P = (x-x')(x-x'')\cdot(aP);$$

folglich für $x = x'$

$$(\partial N)' = (x'-x'')a(P)' \quad \text{und} \quad (P)' = \frac{(\partial N)'}{a(x'-x'')};$$

eben so, für $x = x''$

$$(\partial N)'' = (x''-x')a(P)'' \quad \text{und} \quad (P)'' = -\frac{(\partial N)''}{a(x'-x'')},$$

wo $(\partial N)'$ und $(\partial N)''$ das bedeuten, was aus ∂N wird, wenn man beziehlich x' und x'' statt x setzt.

§. 128. Lehrsatz.

Ist $\frac{M}{N}$ eine ächt gebrochene Funktion, aber

$$N = (ax^2+bx+c)^r\cdot P,$$

wo ax^2+bx+c die beiden einfachen aber verschiedenen Faktoren $x-x'$ und $x-x''$ hat, und P weder durch $x-x'$ noch durch $x-x''$ theilbar ist, so ist es allemal möglich, diese gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$, in Parzial-Brüche zu zerlegen von der Form:

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^r} + \frac{Q}{(ax^2+bx+c)^{r-1}\cdot P}$$

und zwar ist, wie im (§. 127.):

$$A = \frac{\frac{(M)'}{(P)'} - \frac{(M)''}{(P)''}}{x'-x''} \quad \text{und} \quad B = \frac{\frac{(M)''x'}{(P)''} - \frac{(M)'x''}{(P)'}}{x'-x''},$$

$$\text{und } Q = \frac{M-(Ax+B)P}{ax^2+bx+c}.$$

Beweis ist von dem des vorhergehenden Lehrsatzes wenig verschieden.

Anmerkung. Auch hier kann man $(P)'$ und $(P)''$ finden, ohne P zu kennen.

Es ist nämlich:

$$N = (ax^2 + bx + c)^\nu \cdot P = (x - x')^\nu (x - x'')^\nu \cdot a^\nu \cdot P;$$

daher für $x = x'$ (nach §. 99. II.),

$$(\partial^\nu N)' = \nu!(x' - x'')^\nu \cdot a^\nu \cdot (P)' \text{ und } (P)' = \frac{(\partial^\nu N)'}{\nu! a^\nu \cdot (x' - x'')^\nu};$$

eben so, für $x = x''$

$$(\partial^\nu N)'' = \nu!(x'' - x')^\nu \cdot a^\nu \cdot (P)'' \text{ und } (P)'' = \frac{(\partial^\nu N)'}{\nu! a^\nu \cdot (x'' - x')^\nu},$$

wo $(\partial^\nu N)'$ und $(\partial^\nu N)''$ das bedeuten, was aus $\partial^\nu N$ wird, wenn man beziehlich x' und x'' statt x setzt.

§. 129. Zusatz.

Unter denselben Voraussetzungen wie (§. 128.) kann man daher auch $\frac{M}{N}$ zerlegen in Parzial-Brüche von der Form:

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^\nu} + \frac{Cx + D}{(ax^2 + bx + c)^{\nu - 1}} + \frac{Ex + F}{(ax^2 + bx + c)^{\nu - 2}} + \ldots$$
$$+ \frac{Gx + H}{ax^2 + bx + c} + \frac{R}{P}.$$

Beispiel. Es sey $\frac{x + 1}{(x^2 + x + 1)^3 (x^2 + 1)}$ in Parzial-Brüche von der Form:

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + x + 1)^3} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{Ex + F}{x^2 + x + 1} + \frac{R}{x^2 + 1}$$

zu zerlegen.

Man hat hier gerade wie in dem Beispiel (§. 127.)

$M = x + 1;$ $\qquad P = x^2 + 1;$

$x' = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3};$ $\qquad x'' = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3};$

$(P)' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i \sqrt{3};$ $\qquad (P)'' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \sqrt{3};$

$A = 1;$ $\qquad B = 0;$

und $\quad Q = -x + 1.$

Für C und D hat man nun:

$$Q = -x+1, \quad (Q)' = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}, \quad (Q)'' = \tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3};$$

und $C = \dfrac{\frac{(Q)'}{(P)'}-\frac{(Q)''}{(P)''}}{x'-x''}$; $\quad D = \dfrac{\frac{(Q)''x'}{(P)''}-\frac{(Q)'x''}{(P)'}}{x'-x''}$;

folglich, weil $x'-x'' = i\sqrt{3}$ ist,

$$C = \left(\frac{3-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}-\frac{3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right):i\sqrt{3} = 1;$$

$$\text{und } D = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})+\frac{3-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3})\right):i\sqrt{3},$$

oder $D = 2$; und $q = \dfrac{Q-(Cx+D)P}{x^2+x+1} = \dfrac{Q-P(x+2)}{x^2+x+1}$,

oder $q = -x-1$;

also $(q)' = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$; $\quad (q)'' = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i\sqrt{3}$,

und $E = \dfrac{\frac{(q)'}{(P)'}-\frac{(q)''}{(P)''}}{x'-x''}$; $\quad F = \dfrac{\frac{(q)''x'}{(P)''}-\frac{(q)'x''}{(P)'}}{x'-x''}$;

folglich

$$E = \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}+\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right):i\sqrt{3} = -1,$$

$$F = \left(-\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}+\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right):i\sqrt{3} = 0,$$

und $R = \dfrac{q-(Ex+F)P}{x^2+x+1} = \dfrac{q+Px}{x^2+x+1} = x-1.$

Und die gesuchten Parzial Brüche sind daher

$$\frac{x}{(x^2+x+1)^3}, \quad \frac{x+2}{(x^2+x+1)^2}, \quad \frac{-x}{x^2+x+1}, \quad \frac{x-1}{x^2+1},$$

deren Summe der gegebenen gebrochnen Funktion

$$\frac{x+1}{(x^2+x+1)^3\cdot(x^2+1)}$$

gleich seyn muß.

Anmerkung 1. Man kann sich auch hier wieder auf eine der in der (Anmerkung zu §. 122.) angegebenen, vollkommen ähnliche Art, der Ableitungen bedienen, um in manchen Fällen leichter zum Ziele zu kommen.

Da nämlich:

$$\frac{M}{N} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^\nu} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^{\nu-1}} + \cdots + \frac{Gx+H}{ax^2+bx+c} + \frac{R}{P}$$

ist, so ist auch

$$(ax^2+bx+c)^\nu \cdot R = \left\{\begin{matrix} M-(Ax+B)P-(Cx+D)(ax^2+bx+c)P-\cdots \\ -(Gx+H)(ax^2+bx+c)^{\nu-1}\cdot P \end{matrix}\right\}$$

oder

$$a^\nu \cdot (x-x')^\nu \cdot (x-x'')^\nu \cdot R = \left\{\begin{matrix} M-(Ax+B)P-(Cx+D)(x-x')(x-x'')\cdot aP \\ -(Ex+F)(x-x')^2(x-x'')^2\cdot a^2P-\cdots\cdots \\ -(Gx+H)(x-x')^{\nu-1}(x-x'')^{\nu-1}\cdot a^{\nu-1}P \end{matrix}\right\},$$

welcher Ausdruck zur rechten durch Z bezeichnet seyn mag. Da nun Z sowohl durch $(x-x')^\nu$ als auch durch $(x-x'')^\nu$ theilbar ist, so sind die ersten $\nu-1$ Ableitungen von Z, mit Z zugleich, $=0$, sowohl für $x=x'$, als auch für $x=x''$, und man hat daher die 2ν Gleichungen

$$(\odot)\ \left\{\begin{matrix} (Z)'=0,\ (\partial Z)'=0,\ (\partial^2 Z)'=0,\ \cdots\ (\partial^{\nu-1}Z)'=0, \\ (Z)''=0,\ (\partial Z)''=0,\ (\partial^2 Z)''=0,\ \ \ (\partial^{\nu-1}Z)''=0, \end{matrix}\right.$$

welche mit Anwendung der Sätze (§. 99. II.) entwickelt, zur Bestimmung der 2ν Konstanten A, B, C, D, ... G, H, dienen. *)

---

*) In der Praxis pflegt man diese Wege in der Regel nur dann zu betreten, wenn ax^2+bx+c imaginäre einfache Faktoren, also wenn x' die Form $p+q\cdot i$ hat, wo aber dann x'' nothwendig den Werth $p-q\cdot i$ haben muß, weil x'' sich von x' nur dadurch unterscheiden kann, daß hier $-i$ steht, wo dort i. — Aus der ersten Reihe der Gleichungen $(Z)'=0$, $(\partial Z)'=0$, $(\partial^2 Z)'=0$, ꝛc. erhält man daher dann die zweite Reihe derselben, nämlich $(Z)''=0$, $(\partial Z)''=0$, $(\partial^2 Z)''=0$, ꝛc., bloß dadurch, daß man, wo dort i steht, jetzt $-i$ setzt. Aber jede der Gleichungen der ersten Reihe z. B. $(\partial^\alpha Z)'=0$, läßt sich allemal auf die Form

$$\alpha+\beta\cdot i=0$$

Weil aber auch $\frac{Z}{P}$ eine Funktion seyn muß, deren $\nu-1$ erste Ableitungen mit ihr zugleich, sowohl für $x=x'$, als auch für $x=x''$, der Null gleich werden müssen, so hat man auch zur Bestimmung der 2ν Konstanten A, B, C, D, ... G, H, die 2ν Gleichungen

$$(\text{☾})\begin{cases}\left(\frac{Z}{P}\right)'=0,\ \left(\partial\frac{Z}{P}\right)'=0,\ \left(\partial^2\frac{Z}{P}\right)'=0, \cdots \left(\partial^{\nu-1}\frac{Z}{P}\right)'=0,\\ \left(\frac{Z}{P}\right)''=0,\ \left(\partial\frac{Z}{P}\right)''=0,\ \left(\partial^2\frac{Z}{P}\right)''=0,\ \left(\partial^{\nu-1}\frac{Z}{P}\right)''=0,\end{cases}$$

welche mit Anwendung desselben (§. 99. II.) ziemlich einfach ausgedrückt werden können.

Man muß nur bei den Entwicklungen der Gleichungen (⊙) sowohl, als der andern (☾), nicht unterlassen, überall $a(x-x')(x-x'')$ statt ax^2+bx+c zu schreiben.

Anmerkung 2. In der (Anmerkung zu §. 128.) wurde gezeigt, wie $(P)'$ und $(P)''$ gefunden werden können, ohne P selbst zu kennen. — Man kann aber auch

$$(\partial P)',\quad (\partial P)'',\quad (\partial^2 P)',\quad (\partial^2 P)'',\ \cdots\ (\partial^\mu P)',\quad (\partial^\mu P)''$$

finden, ohne P, oder ∂P, oder $\partial^2 P$ rc. zu kennen.

Da nämlich

$$N = (x-x')^\nu \cdot (x-x'')^\nu \cdot a^\nu \cdot P \qquad \text{ist,}$$

---

bringen; folglich ist dann die andere Gleichung $(\partial^\alpha Z)''=0$, nothwendig allemal

$$\alpha-\beta\cdot i=0,$$

demnach, wie aus Verbindung beider Gleichungen hervorgeht,

$$\alpha=0 \qquad \text{und} \qquad \beta=0.$$

Aus diesem Grunde bedarf man, in diesem Falle, gar nicht der zweiten Reihe von Gleichungen, sondern man bekommt schon die nöthigen 2ν Gleichungen, wenn man nur jede der ν ersten Gleichungen auf die Form $\alpha+\beta i=0$ bringt, und dann den imaginären und den reelen Theil, jeden für sich, gleich Null setzt.

Dasselbe gilt von den nachfolgenden 2ν Gleichungen (☾).

so ist nach (§. 99. II.):

$$1)\ (\partial^{\nu+\mu}N)' = (\nu+\mu)^{\nu+1-1}\cdot a^{\nu}\cdot(\partial^{\mu}[(x-x'')^{\nu}\cdot P])',$$

wo die Striche zur Rechten der Klammern andeuten, daß in den eingeschlossenen Funktionen, x' statt x gesetzt ist. — Nun ist aber nach (§. 99.)

$$2)\ \partial^{\mu}[(x-x'')^{\nu}\cdot P] = \partial^{\mu}[(x-x'')^{\nu}]\times P+$$
$$+\mu\cdot\partial^{\mu-1}[(x-x'')^{\nu}]\cdot\partial P+\mu_2\cdot\partial^{\mu-2}[(x-x'')^{\nu}]\cdot\partial^2 P+$$
$$+\mu_3\cdot\partial^{\mu-3}[(x-x'')^{\nu}]\cdot\partial^3 P+\cdots+\mu_2\cdot\partial^2[(x-x'')^{\nu}]\cdot$$
$$\cdot\partial^{\mu-2}P+\mu\cdot\partial[(x-x'')^{\nu}]\cdot\partial^{\mu-1}P+(x-x'')^{\nu}\cdot\partial^{\mu}P.$$

Denkt man sich nun hier x' statt x gesetzt und in (1) substituirt, so erhält man eine Gleichung, welche

$$(\partial^{\nu+\mu}N)',\quad (P)',\quad (\partial P)',\quad (\partial^2 P)',\quad (\partial^3 P)',\ \cdots\ (\partial^{\mu}P)'$$

und andere Konstanten enthält. — Setzt man endlich in dieser letztern Gleichung nach und nach 1, 2, 3, ⋯ u. s. w. statt μ, so erhält man eine beliebige Anzahl neuer Gleichungen, welche

$$(\partial P)',\quad (\partial^2 P)',\quad (\partial^3 P)',\ \cdots\ (\partial^{\mu}P)',$$

eine jede jedesmal durch die vorhergehenden ausgedrückt, geben.

Auf dieselbe Weise wird man dann aber auch $(\partial P)''$, $(\partial^2 P)''$, ⋯ $(\partial^{\mu}P)''$ erhalten können.

§. 130. Zusatz.

Den vorhergehenden Paragraphen gemäß, kann man also jede ächt gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$, deren Nenner ein Produkt aus beliebig viel einfachen und doppelten, gleichen oder ungleichen Faktoren ist, in Parzial-Brüche zerlegen, deren Nenner die verschiedenen einfachen oder doppelten Faktoren sind, oder die Potenzen der **gleichen** doppelten oder einfachen Faktoren, von der höchsten ab, bis zur niedrigsten.

Beispiel. Es sey

$$\frac{x^5-x-1}{(x^2-x+1)^3\cdot x^3\cdot(x^2+x+1)^2\cdot(x^2+1)\cdot(2x+1)}$$

in die Parzial-Brüche

$$\frac{Ax+B}{(x^2-x+1)^3}+\frac{Cx+D}{(x^2-x+1)^2}+\frac{Ex+F}{x^2-x+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2}$$
$$+\frac{Kx+L}{x^2+x+1}+\frac{A'x+B'}{x^2+1}+\frac{C'}{x^3}+\frac{D'}{x^2}+\frac{E'}{x}+\frac{F'}{2x+1}$$

zu zerlegen.

Schluß-Anmerkung.

In der Praxis pflegt man häufig abwechselnd die Methode der unbestimmten Koeffizienten, und die außerdem hier beschriebenen Methoden in Verbindung anzuwenden. Ferner pflegt man in der Praxis Parzial-Brüche mit Nennern vom 2ten Grade nur dann zuzulassen, wenn die einfachen Faktoren (von der Form $x-\alpha$) des Nenners imaginär werden, und die doppelten Faktoren (von der Form $x^2+2px+r^2$) reel. Allein auch dann möchte es in manchen Fällen noch immer praktischer seyn, statt der doppelten reelen Faktoren, die einfachen imaginären Faktoren zu nehmen, und die Zerlegung in lauter einfachste Parzial-Brüche $\left(\text{von der Form } \frac{A}{(x-\alpha)^\nu}\right)$ vorzunehmen, weil eine bedeutende Erleichterung der Rechnung darin gefunden wird, daß wenn $x+p+q\cdot i$ der eine imaginäre Faktor ist, dann $-i$ statt i setzend, daraus der zweite imaginäre Faktor $x+p-q\cdot i$ sich ergibt, welche dann mit einander multiplizirt den reelen doppelten Faktor $x^2+2px+p^2+q^2$ geben. Hat man daher die eine Reihe der Parzial-Brüche gefunden, etwa

$$\frac{A_1}{(x+p+q\cdot i)^\nu}+\frac{A_2}{(x+p+q\cdot i)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{A_\nu}{x+p+q\cdot i},$$

so darf man nur durchaus $-i$ statt i setzen, um sogleich die andere zugehörige Reihe der Parzial-Brüche zu haben, nämlich

$$\frac{B_1}{(x+p-q\cdot i)^\nu}+\frac{B_2}{(x+p-q\cdot i)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{B_\nu}{x+p-q\cdot i},$$

wo unter B_1, B_2, B_3, $\cdots$ B_ν das verstanden wird, was aus A_1, A_2, A_3, $\cdots$ A_ν hervorgeht, wenn man $-i$ statt i setzt.

Ist z. B. in $\frac{M_x}{N_x}$, der Nenner $N_x=(x+p+q\cdot i)(x+p-q\cdot i)\cdot P_x$, so findet man

$$A_1=\frac{(M_x)_{-(p+q\cdot i)}}{-2qi\cdot(P_x)_{-(p+q\cdot i)}},$$

welcher Ausdruck auch die Form

$$A_1=m_1+m_2\cdot i$$

gebracht werden kann; und dann ergibt sich sogleich, $-i$ statt i setzend,

$$B_1 = m_1 - m_2 \cdot i,$$

so daß die beiden ersten Parzial-Brüche

$$\frac{m_1 + m_2 \cdot i}{x + p + q \cdot i} \quad \text{und} \quad \frac{m_1 - m_2 \cdot i}{x + p - q \cdot i}$$

seyn werden, welche zusammen addirt

$$2 \cdot \frac{m_1 \cdot x + m_1 \cdot p + m_2 \cdot q}{x^2 + 2px + p^2 + q^2}$$

geben, während dann, wenn

$$\frac{M_x}{N_x} = \frac{A_1}{x + p + q \cdot i} + \frac{B_1}{x + p - q \cdot i} + \frac{S_x}{P_x}$$

werden soll,

$$S_x = \frac{M_x - 2(m_1 x + m_1 \cdot p + m_2 \cdot q) \cdot P_x}{x^2 + 2px + p^2 + q^2}$$

seyn muß, also danach gefunden wird.

Sollte dagegen $\frac{M_x}{N_x}$ in Parzial-Brüche zerlegt werden, während $N_x = (x^2 + 2px + r)^3 \cdot P_x$ oder $N_x = (x + p + q \cdot i)^3 (x + p - q \cdot i)^3 \cdot P_x$ ist, so sind die Parzial-Brüche zunächst von der Form:

$$\frac{m_1 + m_2 \cdot i}{(x + p + q \cdot i)^3} + \frac{m_1 - m_2 \cdot i}{(x + p - q \cdot i)^3}$$

$$+ \frac{n_1 + n_2 \cdot i}{(x + p + q \cdot i)^2} + \frac{n_1 - n_2 \cdot i}{(x + p - q \cdot i)^2}$$

$$+ \frac{u_1 + u_2 \cdot i}{x + p + q \cdot i} + \frac{u_1 - u_2 \cdot i}{x + p - q \cdot i} + \frac{S_x}{P_x}.$$

Obgleich aber diese 7 Brüche zu einander addirt, den gegebenen $\frac{M_x}{N_x}$ wieder ausmachen, so werden doch die ersten zwei Brüche addirt ein Resultat liefern von der Form

$$\frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}{(x^2 + 2px + p^2 + q^2)^3},$$

und die beiden andern addirt, werden ein Resultat geben von dieser Form

$$\frac{ax^2 + bx + c}{(x^2 + 2px + p^2 + q^2)^2}.$$

Folglich wird man auf diesem Wege, durch Addition der Paare der zusammengehörigen Parzial-Brüche mit imaginären Nennern, die Parzial-Brüche, welche aus der Behandlung der doppelten Faktoren hervorgehen und von der Form

$$\frac{Ex+F}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2} \quad \text{und} \quad \frac{Gx+H}{(x^2+2px+p^2+q^2)^2}$$

sind, nicht direkt erhalten, wenn auch letztere aus erstern leicht gefunden werden können.

Endlich mag noch bemerkt werden, daß, obgleich hier (§. 120.) in einem besondern Falle bewiesen worden ist, daß man dieselben Parzial-Brüche bekommt, wenn auch verschiedene Wege ihrer Entwicklung eingeschlagen werden, der allgemeine Beweis dieses Satzes (für jeden Fall) doch am einfachsten nur aus der in den (§§. 117. u. 125.) angewandten „Methode der unbestimmten Koeffizienten" hervorgeht — Ist nämlich durch das Vorhergehende für jeden einzelnen der hier aufgezählten Fälle die Existenz der Parzial-Brüche vorher außer Zweifel gesetzt, so kann man, während ihre Nenner gegeben sind, ihre Zähler, der Form nach ebenfalls schon bekannt, mit unbestimmten Koeffizienten voraussetzen, und dann auf dem (§§. 117. u. 125.) beschriebenen Wege die einzelnen Gleichungen zur Bestimmung dieser noch unbekannten Koeffizienten entwickelt sich denken; und aus der Art des Verfahrens fällt dann unmittelbar in die Augen, daß diese Gleichungen nach ihren Unbekannten durchaus nur algebraische Gleichungen der ersten Ordnung (sogenannte einfache) sind, daß daher denselben nur durch einen einzigen Werth eines jeden dieser unbekannten Koeffizienten genügt werden könne.

Dritte Abtheilung.

Von der Bestimmung des Werthes eines Ausdrucks, welcher in einem speziellen Falle die Form $\frac{0}{0}$ angenommen hat. — Direktes Verfahren, wenn Ableitungen, aus verwickelt gegebenen Funktionen bestimmt, für einzelne Werthe von x diese Form annehmen.

Vorerinnerung.

Wenn eine Funktion von x die Form $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ hat, und in ihrem Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Theiler f_x, so daß z. B.

$$\varphi_x = M_x \cdot f_x \quad \text{und} \quad \psi_x = N_x \cdot f_x \qquad \text{ist,}$$

so hat man

$$\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{M_x \cdot f_x}{N_x \cdot f_x} = \frac{M_x}{N_x}.$$

Für denjenigen Werth von x, welcher $f_x = 0$ macht, bekommt nun $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ die Form $\frac{0}{0}$ (weil man entweder den Faktor f_x nicht wahrnahm, daher durch ihn Zähler und Nenner noch nicht wegdividirt hat, oder weil man absichtlich nicht wegdividiren wollte), während $\frac{M_x}{N_x}$ der wahre Werth des Ausdrucks $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ ist, auch für diesen Werth von x. — Daher entsteht die Frage: Wenn für x = a, $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ d. h. $\frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a}$ *) die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wie kann der wahre Ausdruck $\frac{(M)_a}{(N)_a}$ gefunden werden, ohne gerade $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ mit dem gemeinschaftlichen Faktor f_x

---

*) Unter $(\varphi)_a$, so wie unter $(\varphi_x)_a$, wird das verstanden, was aus φ_x wird, wenn man a statt x schreibt.

wegdividirt, also ohne den, dem $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ allemal für jeden Werth von x, gleichen Quotienten $\frac{M_x}{N_x}$ wirklich vorher gefunden zu haben.

Weil aber hier alles darauf ankommt, den gemeinschaftlichen Faktor $(f_x)_a$ oder $(f)_a$ (d. h. f_x für $x = a$) herzustellen, aber noch ehe er $= 0$ ist, um vorher durch ihn wegdividiren zu können, so darf man nur $a+h$ statt x setzen, und es wird aus f_x jetzt $(f)_{a+h}$ d. h. nach dem Taylor'schen Lehrsatze, und weil $(f_a) = 0$ ist, $(\partial f)_a \cdot h + (\partial^2 f)_a \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots$ wo die Ableitungen nach x genommen sind, während in ihnen dann nachher a statt x gesetzt wird. — Zähler und Nenner in $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ d. h. jetzt in $\frac{(\varphi)_{a+h}}{(\psi)_{a+h}}$, werden daher durch h oder durch eine Potenz von h wegdividirt werden können, so daß, nachdem erst wegdividirt ist, $h = 0$ gesetzt werden kann, ohne daß der Ausdruck wiederum die Form $\frac{0}{0}$ annehmen müßte.

Man kann ferner $\frac{1}{\psi_x} = F_x$ setzen, und der Ausdruck $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ wird dann die Form $\varphi_x \cdot F_x$ annehmen, und für $x = a$ die Form $0 \cdot \frac{1}{0}$ (oder wie man gewöhnlich schreibt, $0 \cdot \infty$).

Ferner kann auch $\varphi_x = \frac{1}{\pi_x}$ gesetzt werden, und der Ausdruck $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ geht dann in $\frac{1:\pi_x}{1:F_x}$ d. h. in $\frac{F_x}{\pi_x}$ über, und wird für $x = a$ die Form $\frac{1:0}{1:0}$ (oder wie man gewöhnlich schreibt, $\frac{\infty}{\infty}$) annehmen.

Endlich kann auch $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ anfänglich die Form $\frac{1}{P_x} \pm \frac{1}{Q_x}$ haben, so daß $\varphi_x = Q_x \pm P_x$ und $\psi_x = Q_x \cdot P_x$ wird, also daß $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ für gewisse Werthe von x unter der Form $\frac{1}{0} \pm \frac{1}{0}$ erscheint, aber doch eigentlich von der Form $\frac{0}{0}$ ist.

In allen diesen letztern Fällen hat man aber nur jedesmal diese Formen $\varphi_x \cdot F_x$ oder $\frac{F_x}{\pi_x}$, auf die erstere $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$, welche die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, zurückzuführen, um auf obigem Wege das Verlangte jedesmal nach derselben Vorschrift suchen zu können.

Was aber hier in der Idee angedeutet ist, mag nun wirklich durchgeführt und die Schwierigkeiten, welche sich im Einzelnen zeigen, zu heben versucht werden.

§. 131. Aufgabe.

Es ist gegeben der Ausdruck $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$, welcher für $x = a$, die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. Man soll in diesem Falle seinen wahren Werth finden.

Auflösung.

1) Man setze zuerst $a + h$ statt x und erhält nach dem Taylor'schen Lehrsatze, und weil $(\varphi)_a = (\psi)_a = 0$ ist,

$$\text{I. } \frac{(\varphi)_{a+h}}{(\psi)_{a+h}} = \frac{(\partial\varphi)_a \cdot h + (\partial^2\varphi)_a \cdot \frac{h^2}{2!} + (\partial^3\varphi)_a \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots}{(\partial\psi)_a \cdot h + (\partial^2\psi)_a \cdot \frac{h^2}{2!} + (\partial^3\psi)_a \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots},$$

wo die Ableitungen alle nach x genommen sind, während nachher a statt x gesetzt wird.

Dividirt man nun hier Zähler und Nenner durch h weg, und setzt dann $h = 0$, so erhalt man:

$$\text{II. } \frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a} = \frac{(\partial\varphi)_a}{(\partial\psi)_a}.$$

2) Wird aber $(\partial\varphi)_a$ und $(\partial\psi)_a$, jedes für sich wiederum $= 0$, so fangen in (I.) die Glieder im Zähler und Nenner zur Rechten, erst mit $\frac{h^2}{2!}$ an. Dividirt man daher durch dieses $\frac{h^2}{2!}$ weg, und setzt dann $h = 0$, so ergibt sich

$$\text{III. } \frac{(\varphi)_a}{(\psi)_x} = \frac{(\partial^2\varphi)_a}{(\partial^2\psi)_a}.$$

3) Und sollte dieser Ausdruck zur Rechten noch einmal die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so erhielte man

$$\text{IV.} \quad \frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a} = \frac{(\partial^3\varphi)_a}{(\partial^3\psi)_a}.$$

4) Und allgemein wird

$$\text{V.} \quad \frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a} = \frac{(\partial^n\varphi)_a}{(\partial^n\psi)_a},$$

wenn φ_a, $(\partial\varphi)_a$, $(\partial^2\varphi)_a$, ... $(\partial^{n-1}\varphi)_a$, so wie auch ψ_a, $(\partial\psi)_a$, $(\partial^2\psi)_a$, ... $(\partial^{n-1}\psi)_a$, alle einzeln $= 0$ geworden seyn sollten.

§. 132. Zusatz.

Nimmt man an, daß der gemeinschaftliche Faktor f_x die Form $(x-a)^n$ habe, unter n eine positive ganze Zahl verstanden, so wäre

$$\varphi_x = (x-a)^n \cdot M_x \quad \text{und} \quad \psi_x = (x-a)^n \cdot N_x.$$

Folglich für $x = a$, nach (§. 99. II.)

$$(\partial^n\varphi)_a = n!(M)_a \quad \text{und} \quad (\partial^n\psi)_a = n!(N)_a;$$

also
$$\frac{(\partial^n\varphi)_a}{(\partial^n\psi)_a} = \frac{n!(M)_a}{n!(N)_a} = \frac{(M)_a}{(N)_a} = \frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a},$$

welches dasselbe in (§. 131.) enthaltene Resultat ist.

Wäre aber der gemeinschaftliche Faktor $(x-a)^{n+\frac{\mu}{\nu}}$, wo n Null oder eine ganze Zahl, $\frac{\mu}{\nu}$ aber < 1 ist, so würden

$$(\partial^n\varphi)_a = 0, \quad \text{und} \quad (\partial^n\psi)_a = 0,$$

dagegen

$$(\partial^{n+1}\varphi)_a = \frac{1}{0}, \quad \text{und} \quad (\partial^{n+1}\psi)_a = \frac{1}{0}$$

werden, und alle höhere Ableitungen nach x von φ und ψ, für $x = a$ die Form $\frac{1}{0}$ behalten; also würden die Quotienten

$$\frac{\varphi_a}{\psi_a}, \quad \frac{(\partial\varphi)_a}{(\partial\psi)_a}, \quad \ldots, \quad \frac{(\partial^n\varphi)_a}{(\partial^n\psi)_a}, \quad \frac{(\partial^{n+1}\varphi)_a}{(\partial^{n+1}\psi)_a}, \quad \ldots \quad \frac{(\partial^{n+m}\varphi)_a}{(\partial^{n+m}\psi)_a},$$

alle die Form $\frac{0}{0}$, oder die Form $\frac{1:0}{1:0}$ (gewöhnlich $\frac{\infty}{\infty}$ geschrieben) d. h. wiederum die Form $\frac{0}{0}$ haben, bis in's Unendliche fort, und man würde daher dann auf diesem Wege nie den wahren Werth von $\frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a}$ auffinden.

Anmerkung. Daß man hierbei auch die andere Form des Taylor'schen Lehrsatzes anwenden könne, wo statt der Ableitungen Differenzialquotienten stehen, versteht sich von selbst. — Ja weil

$$d^n\varphi = \partial^n\varphi_x \cdot dx^n$$

und

$$d^n\psi = \partial^n\psi_x \cdot dx^n$$

ist, so folgt

$$\frac{d^n\varphi}{d^n\psi} = \frac{\partial^n\varphi_x}{\partial^n\psi_x},$$

so daß man hier statt der Ableitungen (∂) geradezu die Differenzialien (d) nehmen kann, indem sich zuletzt die unnützen Faktoren dx^n wiederum wegdividiren.

§. 133. Zusatz.

Es mußte aber dieser speziellen Betrachtungen des vorhergehenden (§. 132.) nicht bedürfen, um einzusehen, daß die Auflösung des (§. 131.) nicht in allen Fällen ausreichen kann.

Wenn wir nämlich auch (§. 5.) bewiesen haben, daß, welche Funktion φ_x immer seyn mag, doch allemal φ_{x+h} in eine nach ganzen Potenzen von h fortlaufende Reihe verwandelt werden kann, so lange x ganz allgemein ist, so hat doch derselbe Beweis zu gleicher Zeit gezeigt, wie in Ausnahmsfällen, für spezielle Werthe von x, eine nach gebrochenen Potenzen von h fortgehende Reihe, und zuweilen gar keine nach Potenzen von h fortlaufende Reihe existire, welche dem φ_{x+h}, für diesen speziellen Werth von x, gleich seyn könnte; ja daß diese Ausnahmsfälle

allemal daran erkannt würden, daß einige oder alle Koeffizienten der allgemeinen, für φ_{x+h} erhaltenen, und zwar (wie später (§. 12.) gezeigt worden) Taylor'schen Reihe, also einige oder alle Ableitungen $\partial\varphi$, $\partial^2\varphi$, $\partial^3\varphi$, $\partial^4\varphi$, *rc.* $\partial^n\varphi$, $\partial^{n+1}\varphi$, ... $\partial^{n+m}\varphi$, ..+ für diese speziellen Werthe von x, eine im Kalkul nicht zulässige Form, etwa die Form $\frac{1}{0}$ oder *log* 0, oder dergl. annehmen.

So oft daher der Werth a von x, welcher $\frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a}$ auf die Form $\frac{0}{0}$ bringt, einer der Ausnahmswerthe ist, für welchen $(\varphi)_{a+h}$, oder $(\psi)_{a+h}$, oder beide, nicht nach ganzen Potenzen von h fortgehend entwickelt werden können, so oft muß (nach den Beispielen des §. 8.) $(\varphi)_{a+h}$ nnd $(\psi)_{a+h}$ direkt und ohne den Taylor'schen Lehrsatz anwenden zu können, in, nach Potenzen von h fortlaufende Reihen verwandelt, so viel wie möglich Zähler und Nenner von $\frac{(\varphi)_{a+h}}{(\psi)_{a+h}}$ durch h wegdividirt, und nachgehends h = 0 gesetzt werden.

Beispiel 1. Den Werth von $\frac{a^n - x^n}{a^m - x^m}$ für x = a zu finden. Hier ist

$$\varphi_x = a^n - x^n \quad \text{und} \quad \partial\varphi_x = -nx^{n-1},$$

so wie

$$\psi_x = a^m - x^m, \quad \partial\psi_x = -mx^{m-1};$$

also

$$\frac{(\varphi)_a}{(\psi)_a} = \frac{(\partial\varphi)_a}{(\partial\psi)_a} = \frac{-na^{n-1}}{-ma^{m-1}} = \frac{n}{m} \cdot a^{n-m}.$$

Beispiel 2. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$, so ist

$$\partial\varphi_x = nx^{n-1}, \quad \partial\psi_x = 1,$$

also für x = 1,

$$\frac{(\varphi_x)_1}{(\psi_x)_1} = \frac{0}{0} = \frac{(\partial\varphi_x)_1}{(\partial\psi_x)_1} = n. \text{*)}$$

---

*) Es ist $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + x^{n-3} + \cdots + x^2 + x + 1$. Folglich ist für x = 1, dieser Quozient = n.

Beispiel 3. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{ax^2 - 2acx + ac^2}{bx^2 - 2bcx + bc^2}$,

so ist $\partial\varphi_x = 2ax - 2ac$; $\partial^2\varphi_x = 2a$;

$\partial\psi_x = 2bx - 2bc$; $\partial^2\psi_x = 2b$.

Und für $x = c$,

$$\frac{(\varphi_x)_c}{(\psi_x)_c} = \frac{0}{0} = \frac{(\partial\varphi_x)_c}{(\partial\psi_x)_c} = \frac{0}{0} = \frac{(\partial^2\varphi_x)_c}{(\partial^2\psi_x)_c} = \frac{a}{b}. \text{ *)}$$

Beispiel 4. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{a^x - b^x}{\log(1-x)}$, so ist

$\partial\varphi_x = a^x \cdot \log a - b^x \cdot \log b$; $\partial\psi_x = \frac{-1}{1-x}$;

also für $x = 0$,

$$\frac{(\varphi_x)_0}{(\psi_x)_0} = \frac{0}{0} = \frac{(\partial\varphi_x)_0}{(\partial\psi_x)_0} = \frac{\log a - \log b}{-1} = \log b - \log a. \text{ **)}$$

Beispiel 5. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{x^3 - ax^2 - a^2x + a^3}{x^2 - a^2}$,

so hat man $\partial\varphi_x = 3x^2 - 2ax - a^2$, $\partial\psi_x = 2x$;

---

*) Der ganze gegebene Ausdruck $\frac{\varphi_x}{\psi_x}$ läßt sich mit $x^2 - 2cx + c^2$ d. h. mit $(x-c)^2$ heben, und gibt dann sogleich $\frac{a}{b}$ für jeden Werth von x, also natürlich auch, wenn $x = c$ ist.

**) Dasselbe erhält man, wenn man statt a^x, b^x, die unendlichen Reihen setzt, welche sie vorstellen, nämlich

$$1 + x \cdot \log a + \frac{x^2 \cdot \log a^2}{2!} + \cdots$$

$$1 + x \cdot \log b + \frac{x^2 \cdot \log b^2}{2!} + \cdots;$$

eben so für $\log(1-x)$ die Reihe

$$-x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \cdots;$$

dann durch x erst Zähler und Nenner dividirt, zuletzt aber 0 statt x setzt.

also für $x = a$,

$$\frac{(\varphi_x)_a}{(\psi_x)_a} = \frac{0}{0} = \frac{(\partial\varphi_x)_a}{(\partial\psi_x)_a} = \frac{0}{2a} = 0.$$

Beispiel 6. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{ax - x^2}{a^4 - 2a^3x + 2ax^3 - x^4}$,

so ist $\partial\varphi_x = a - 2x$, $\partial\psi_x = -2a^3 + 6ax^2 - 4x^3$;

also für $x = a$,

$$\frac{(\varphi_x)_a}{(\psi_x)_a} = \frac{0}{0} = \frac{(\partial\varphi_x)_a}{(\partial\psi_x)_a} = \frac{-a}{0} = \frac{1}{0},$$

eine im Kalkul unzulässige Form, welche zuweilen, in den Anwendungen, das Unendliche repräsentirt. *)

Beispiel 7. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = (a - x) \cdot Tg\left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{x}{a}\right), = \left(0 \cdot \frac{1}{0}\right)$

für $x = a$,

so hat man $$\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{a - x}{Cotg\left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{x}{a}\right)},$$

folglich $\partial\varphi_x = -1$, $\partial\psi_x = \frac{-\frac{1}{2}\frac{\pi}{a}}{\left(Sin\left(\frac{1}{2}\pi \cdot \frac{x}{a}\right)\right)^2}$,

mithin $$\frac{(\varphi_x)_a}{(\psi_x)_a} = \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{a}} = \frac{2a}{\pi}.$$

Beispiel 8. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{1 - Sin\,x + Cos\,x}{Sin\,x + Cos\,x - 1}$,

so ist $\partial\varphi_x = -Cos\,x - Sin\,x$, $\partial\psi_x = Cos\,x - Sin\,x$,

folglich für $x = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{-1}{-1} = 1.$

---

*) Man konnte auch Zähler und Nenner des gegebenen Ausdrucks durch $a - x$ wegdividiren, und erhielt dann

$$\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{x}{a^3 - a^2x - ax^2 + x^3}$$ für jeden Werth von x;

also für $x = a$, $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{a}{o} = \frac{1}{0}.$

Beispiel 9. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = Tg\,2x \cdot Cotg(\frac{1}{4}\pi + x) = \frac{Cotg(\frac{1}{4}\pi + x)}{Cotg\,2x}$,

so ist $\quad \partial\varphi_x = \frac{-1}{[Sin(\frac{1}{4}\pi + x)]^2}, \qquad \partial\psi_x = \frac{-2}{(Sin\,2x)^2}$,

folglich für $x = \frac{1}{4}\pi$, $\qquad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Beispiel 10. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{a - x - a \cdot log\,a + a \cdot log\,x}{a - \sqrt{2ax - x^2}}$,

so ist $\quad \partial\varphi_x = -1 + \frac{a}{x}, \qquad \partial\psi_x = -\frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}$,

folglich für $x = a$, $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = -\frac{\sqrt{a^2}}{a} = -\sqrt{1} = \mp 1$. *)

Beispiel 11. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{Sin(\alpha + \beta) \cdot Sin(\alpha + x) - Sin\,\beta \cdot Sin\,x}{Sin(\alpha + \beta + x)}$,

so ist

$\partial\varphi_x = Sin(\alpha + \beta) \cdot Cos(\alpha + x) - Sin\,\beta \cdot Cos\,x$, $\partial\psi_x = Cos(\alpha + \beta + x)$,

folglich für $x = \pi - \alpha - \beta$, $\qquad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{-Sin\,\alpha}{-1} = Sin\,\alpha$.

Beispiel 12. Ist $\qquad \frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{x^x - x}{1 - x + log\,x}$,

so ist $\quad \partial\varphi_x = x^x \cdot (1 + log\,x) - 1, \qquad \partial\psi_x = -1 + \frac{1}{x}$,

folglich für $x = 1$, $\qquad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{0}{0}$.

Geht man deshalb weiter zu

$\partial^2\varphi_x = x^x \cdot (1 + log\,x)^2 + x^{x-1}, \qquad \partial^2\psi_x = -\frac{1}{x^2}$;

so erhält man für $x = 1$, $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2\psi} = \frac{2}{-1} = -2$.

---

*) Man darf durchaus nicht sagen, wie Lacroix thut, daß der Werth -1 sey, weil er eben so gut $+1$ seyn kann. Und erst die Anwendung muß entscheiden, welcher von beiden, oder ob jeder, beibehalten werden muß.

Beispiel 13. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-\log x}{(x-1)\cdot\log x}$,

so ist $\quad \partial\varphi_x = 1 - \frac{1}{x}, \qquad \partial\psi_x = 1 - \frac{1}{x} + \log x$;

mithin für $x = 1$, $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{0}{0}$; also ferner

$$\partial^2\varphi_x = \frac{1}{x^2}, \qquad \partial^2\psi_x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x};$$

folglich für $x = 1$, $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2\psi} = \frac{1}{2}$.

Beispiel 14. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} = \frac{-1+x}{1-x^2}$,

so ist $\quad \partial\varphi_x = 1, \qquad \partial\psi_x = -2x$,

folglich für $x = 1$, $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = -\frac{1}{2}$.

Beispiel 15. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{Sin\,x - x\cdot Cos\,x}{Sin\,x^3}$,

so ist $\quad \partial\varphi_x = x\cdot Sin\,x, \qquad \partial\psi_x = 3\cdot Sin\,x^2\cdot Cos\,x$,

folglich für $x = 0$, $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{x}{3\,Sin\,x\cdot Cos\,x} = \frac{2x}{3\cdot Sin\,2x} = \frac{0}{0}$.

Statt aber weiter $\partial^2\varphi$ und $\partial^2\psi$ zu finden, sucht man lieber auf's neue den Werth von $\frac{2x}{3\cdot Sin\,2x}$ für $x = 0$, *) und erhält

---

*) Dieses Verfahren ist aus folgenden Gründen erlaubt. Ist nämlich

$$\partial\varphi = f_x\cdot\pi_x \qquad \text{und} \qquad \partial\psi = f_x\cdot\mu_x,$$

so ist $\quad \partial^2\varphi = f_x\cdot\partial\pi_x + \pi_x\cdot\partial f_x, \quad \partial^2\psi = f_x\cdot\partial\mu_x + \mu_x\cdot\partial f_x$

d. h., wenn $\frac{\pi_x}{\mu_x}$ noch $\frac{0}{0}$ geworden ist, also wenn noch $\pi = 0$ und $\mu = 0$ geworden seyn sollte,

$$\partial^2\varphi = f_x\cdot\partial\pi_x, \qquad \partial^2\psi = f_x\cdot\partial\mu_x$$

und
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2\psi} = \frac{\partial\pi_x}{\partial\mu_x}$$

für diesen bestimmten Werth von x.

$\partial(2x) = 2, \qquad \partial(3 Sin 2x) = 6 \cdot Cos 2x,$

also für $x = 0, \qquad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$

Beispiel 16. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{x + x \cdot Cos x^2 - \frac{1}{2} Sin 2x}{Sin x^3}$,

so ist $\partial\varphi_x = 1 + Cos x^2 - 2x Sin x \cdot Cos x - \frac{3}{2} \cdot Cos 2x,$

$\partial\psi_x = 3 Sin x^2 \cdot Cos x;$

folglich für $x = 0, \qquad \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = \frac{\frac{1}{2}}{0} = \frac{1}{0},$

eine im Kalkul unzuläßige Form, welche in der Anwendung zuweilen das Unendliche repräsentirt.

Nach diesen Beispielen mögen nun einige kommen, bei denen es bequem ist, oder sogar nothwendig, direkt $a + h$ statt x zu setzen, und die Entwicklung nach Potenzen von h direkt vorzunehmen, dem (§. 133.) zu Folge.

Beispiel 17. Um den wahren Werth von

$$\frac{x^3 - 4ax^2 + 7a^2x - 2a^3 - 2a^2\sqrt{2ax - a^2}}{x^2 - 2ax - a^2 + 2a\sqrt{2ax - x^2}}$$

für $x = a$ zu finden, müßte man bis zu $\partial^4\varphi$ und $\partial^4\psi$ gehen, weil selbst noch $\partial^3\varphi$, $\partial^3\psi$ für $x = a$, der Null gleich werden. Setzt man daher hier sogleich $a + h$ statt x, so erhält man

$$\frac{2a^3 + 2a^2h - ah^2 + h^3 - 2a^2 \cdot \sqrt{a^2 + 2ah}}{-2a^2 + h^2 + 2a \cdot \sqrt{a^2 - h^2}}.$$

Wenn man hier nun die beiden Wurzeln, als Potenzen geschrieben, in Reihen nach h entwickelt, so erhält man

$$\sqrt{a^2 + 2ah} = \sqrt{1} \cdot \left[a + h - \frac{1}{2a}h^2 + \frac{1}{2a^2}h^3 - \frac{5}{8a^3}h^4 + \cdots\right],$$

$$\sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{1} \cdot \left[a - \frac{1}{2a}h^2 - \frac{1}{8a^3}h^4 - \cdots\right].$$

Und wenn hier $+1$ statt $\sqrt{1}$ gesetzt wird, unter welcher Voraussetzung der gegebene Quozient gerade die Form $\frac{0}{0}$ angenommen hat,

so erhält man, Zähler und Nenner durch h^4 wegdividirend, und dann erst $h = 0$ setzend, $-5a$ für den wahren Werth des Ausdrucks $\frac{0}{0}$.

Beispiel 18. Wäre $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$, *)

so würde $\quad \partial\varphi_x = 0, \quad \partial^2\varphi_x = \partial^3\varphi_x = \text{ꝛc.} = \frac{1}{0}$

und $\quad \partial\psi_x = 0, \quad \partial^2\psi_x = \partial^3\psi_x = \text{ꝛc.} = \frac{1}{0}$

werden für $x = a$. — Setzt man aber hier direkt $a+h$ statt x, so wird $\frac{\varphi}{\psi}$ in $\frac{(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}$ d. h. in $(2a+h)^{\frac{3}{2}}$ übergehen, also für $h=0$, sogleich $(2a)^{\frac{3}{2}}$ liefern.

Man konnte aber auch hier $\frac{\varphi}{\psi}$ in $\sqrt{\frac{(x^2-a^2)^3}{(x-a)^3}}$ umwandeln, und dann den Werth von $\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{(x^2-a^2)^3}{(x-a)^3}$ für $x=a$ suchen; man hätte dann für $x = a$

$$\partial\varphi' = 0, \quad \partial^2\varphi' = 0, \quad \partial^3\varphi' = 3!(2a)^3,$$
$$\partial\psi' = 0, \quad \partial^2\psi' = 0, \quad \partial^3\psi' = 3!;$$

folglich $\quad \frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\partial^3\varphi'}{\partial^3\psi'} = (2a)^3, \qquad$ für $x = a$;

also $\quad \frac{\varphi}{\psi} = \sqrt{(2a)^3}, \qquad$ für $x = a$.

Beispiel 19. Suche man den Werth von $\frac{\log x}{x^n}$ für $x = \frac{1}{0}$, **) so fände man bald, daß diese Aufgabe nicht hieher gehöre, daß hier Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, und daß man hier nur die Grenze suche, welcher sich der Ausdruck $\frac{\log x}{x^n}$ immer mehr nähert, je größer x genommen wird. ***)

---

*) Also $= (x+a)^{\frac{3}{2}}$ für jeden Werth von x; mithin $(2a)^{\frac{3}{2}}$ für $x = a$.

**) D. h., wie man gewöhnlich sich ausdrückt, für x unendlich groß, oder, wie man gewöhnlich schreibt, für $x = \infty$.

***) Obgleich diese Aufgabe zu einer ganz andern Gattung von

Beispiel 20. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log x} = \frac{x \cdot \log x - x + 1}{(x-1) \cdot \log x}$, dessen Werth für $x = 1$, gefunden werden soll, so hat man, $1+h$ statt x setzend,

$$\frac{(\varphi)_{1+h}}{(\psi)_{1+h}} = \frac{(1+h) \cdot \log(1+h) - h}{h \cdot \log(1+h)} = \frac{(1+h) \cdot [h - \frac{1}{2}h^2 + \cdots] - h}{h \cdot (h - \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{3}h^3 + \cdots)}.$$

Dividirt man hier Zähler und Nenner durch h^2 weg, so erhält man für $h = 0$, im Zähler $\frac{1}{2}$, im Nenner dagegen 1; folglich $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{1}{2}$ für $x = 1$.

Beispiel 21. Ist $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x \cdot Tg\,\pi x} = \frac{Tg\,\pi x - \pi x}{2x^2 \cdot Tg\,\pi x}$, dessen Werth für $x = 0$ gefunden werden soll, so setze man zuerst $0+h$ d. h. h, d. h. x, statt x, d. h. man dividire sogleich Zähler

---

Aufgaben gehört, für welche eigene Prinzipien hingestellt werden müssen, so mag sie doch hier gelegentlich gelöst werden. Setzt man nämlich statt x^n die nach Potenzen von n fortlaufende Reihe, so erhält man

$$\frac{\log x}{x^n} = \frac{\log x}{1 + n \cdot \log x + \frac{n^2}{2!} \cdot \log x^2 + \cdots\cdots}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\log x} + n + \frac{n^2}{1 \cdot 2} \cdot \log x + \frac{n^3}{3!} \log x^2 + \cdots\cdots}.$$

Weil aber $\frac{1}{\log x}$ der Null immer näher rückt, je größer x ist, so rückt, für ein positives n, der Bruch $\frac{\log x}{x^n}$, der Null immer näher, je größer x genommen wird, weil der Nenner immer größer und größer wird. — Für ein negatives $n = -m$, wird $\frac{\log x}{x^n} = x^m \cdot \log x$, also unendlich groß für $x = \infty$. —

Setzt man $x = \frac{1}{z}$, so wird $\frac{\log x}{x^n} = -z^n \cdot \log z$, und für $x = \infty$, $z = 0$, also ist zu gleicher Zeit die Grenze der Werthe von $-z^n \cdot \log z$, für, der Null immer näher rückende Werthe von z gefunden.

und Nenner, nachdem solche nach Potenzen von x entwickelt sind, durch x weg, um nachher x = 0 setzen zu können. Der bequemern Entwicklung in Reihen wegen, setze man aber $\frac{Sin}{Cos}$ statt Tg, und multiplizire Zähler und Nenner mit Cos weg, so erhält man zunächst

$$\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{Sin\,\pi x - \pi x \cdot Cos\,\pi x}{2x^2 \cdot Sin\,\pi x}$$

$$= \frac{\left[\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \cdots\right] - \pi x \cdot \left[1 - \frac{\pi^2 x^2}{2!} + \cdots\right]}{2x^2 \cdot \left[\pi x - \frac{\pi^3 x^3}{3!} + \cdots\right]}.$$

Dividirt man hier nun Zähler und Nenner durch x^3 weg, setzt dann 0 statt x, so erhält man im Zähler $\frac{1}{3}\pi^3$, im Nenner dagegen 2π, so daß $\frac{\varphi}{\psi} = \frac{1}{6}\pi^2$ wird, für $x = 0$.

Beispiel 22. Soll der Werth von

$$\frac{\varphi_x}{\psi_x} = \frac{(x-y)a^n - (a-y)x^n + (a-x)y^n}{(x-y)(a-y)(a-x)}$$

für $x = y = a$, gefunden werden, so suche man solchen zuerst für $x = a$, $a+h$ statt x setzend; und man erhält, Zähler und Nenner durch h wegdividirend,

$$\frac{\varphi}{\psi} = \frac{a^n - (a-y)na^{n-1} - y^n}{(a-y)^2} \quad \text{für } x = a.$$

Dieser Ausdruck wird aber wieder für $y = a$, $a+h$ statt y setzend, und Zähler und Nenner durch h^2 wegdividirend, $= n_2 \cdot a^{n-2}$.

Anmerkung. Zum Schlusse empfehlen wir noch, als ein instruktives Uebungsbeispiel, die Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

nach x aufzulösen, und dann zu untersuchen, was aus diesem für x gefundenen (3 deutigen) Ausdruck wird, wenn $a = 0$. — Man findet, daß einer der drei Werthe für x, $= \frac{1}{0}$, die beiden andern aber $= \frac{0}{0}$ werden, und diese letztern geben die Werthe für x, wie solche auch aus $bx^2 + cx + d = 0$ hervorgehen.

§. 134. Zusatz.

Setzt man 1) $\frac{\varphi_x}{\psi_x} = z$,

so erhält man 2) $\varphi - \psi \cdot z = 0$

als eine Gleichung, welche durch den gemeinschaftlichen Faktor f_x, der in φ und ψ vorausgesetzt wird, wegdividirt werden kann; ja man kann auch aus $\varphi_x : \psi_x = z$ überhaupt eine Gleichung ableiten

$$3)\quad F_{x,z} = 0.$$

Differenziirt man nun diese Gleichung nach allem x, so erhält man:

$$4)\quad \partial F_x + \partial F_z \cdot \partial z = 0$$

oder

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = 0,$$

welche in

$$5)\quad \partial F_x = 0 \quad \text{d. h.}\quad \frac{dF}{dx} = 0$$

übergeht, so oft für einen bestimmten Werth von x, $\partial F_z = 0$ wird. — Die Gleichung (5.) ist aber dann zuweilen bequemer, zur Bestimmung von Z für diesen Werth von x, als die (1.).

Da in der Regel die Wurzeln (d. h. die gebrochenen Potenzen) und zuweilen auch die Logarithmen Ursache sind, daß alle Ableitungen eines, dieselben enthaltenden Ausdruckes, entweder $= 0$ oder $= \frac{1}{0}$ werden, für gewisse Werthe von x, so daß die Methode des (§. 131.) dann nicht zum Ziele führt, so wird man namentlich in diesen Fällen, die Gleichung $F_{x,z} = 0$, und zwar dieselbe so herzustellen suchen, daß diese genannten indirekten Operationen ganz herausfallen.

Beispiel 1. Soll der Werth von $\frac{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}}{(x-a)^{\frac{3}{2}}}$ gesucht werden, für $x=a$, so setze man zuvörderst $(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}} = (x-a)^{\frac{3}{2}} \cdot z$, und man hat dann, mit 2 potenzirend:

$$(x^2-a^2)^3 = (x-a)^3 \cdot z^2;$$

folglich, wenn man nach allem x ableitet oder differenziirt,

$$6(x^2-a^2)^2x = 3(x-a)^2\cdot z^2 + 2(x-a)^3\cdot z\cdot \partial z$$
$$= (x-a)^2\cdot[3z^2+2(x-a)z\cdot\partial z],$$

oder $$6(x^2-a^2)^2x = 3(x-a)^2\cdot z^2,$$

wenn man, weil für $x=a$, der Koeffizient der Ableitung ∂z bereits 0 wird, dieses Glied wegläßt.

Differenziirt man nun noch einmal nach allem x, so erhält man, für $x=a$, das mit ∂z affizirte Glied, weil es $=0$ ist, sogleich weglassend,

$$6(x^2-a^2)^2+24(x^2-a^2)x^2 = 6(x-a)\cdot z^2;$$

und dieses nochmal nach allem x differenziirend, für $x=a$,

$$48a^3 = 6\cdot z^2,$$

so daß $$z^2 = 8a^3 \quad \text{und} \quad z=\sqrt{8a^3}=(2a)^{\frac{3}{2}}.$$

Beispiel 2. Soll der Werth von $z=\frac{\frac{1}{2}-\sqrt{1-3x^2}}{2x-1}$ gefunden werden, für $x=\frac{1}{2}$, so findet sich, nach Wegschaffung der Brüche und der Wurzel

$$[(2x-1)z-\tfrac{1}{2}]^2 = 1-3x^2;$$

folglich, nach allem x differenziirend, und das mit ∂z affizirte Glied, weil für $x=\frac{1}{2}$ sein Koeffizient 0 ist, sogleich weglassend,

$$4[(2x-1)z-\tfrac{1}{2}]\cdot z = -6x, \quad \text{für } x=\tfrac{1}{2};$$

d. h. $$-2z=-3, \quad \text{oder} \quad z=\tfrac{3}{2}.$$

Anmerkung. Der Erfolg dieser Methode gründet sich aber vorzüglich darauf, daß wenn man $f_x\cdot z^n$ ableitet oder differenziirt, dann $\partial f_x\cdot z^n + n\cdot f_x\cdot z^{n-1}\cdot\partial z$ sich ergibt, so daß, wenn der Koeffizient von ∂z den Faktor $(x-a)^m$ (in f_x) hat, dann der Koeffizient ∂f_x von z^n, offenbar nur den Faktor $(x-a)^{m-1}$ hat; und daß, bei dem weitern Differenziiren, die Ableitungen ∂z, $\partial^2 z$ ꝛc. mit immer höhern Potenzen von $(x-a)$ als z selbst versehen sind, während vielleicht der Koeffizient von z, dieses $(x-a)$ gar nicht mehr hat, weshalb man überzeugt seyn kann, daß wenn bei irgend einem mten Differenzial, zum erstenmal der Faktor von z nicht Null wird, doch noch die Faktoren von ∂z, $\partial^2 z$, ꝛc. ꝛc. Null seyn werden.

Wenn übrigens diese Methode nicht immer praktisch ge-

Beispiel 1. Gesetzt man hätte aus der Gleichung

$$1)\ (y-b)^2-(x-a)^2(x-c)=0$$

erhalten

$$2)\ 2(y-b)\cdot\partial y-2(x-a)(x-c)-(x-a)^2=0,$$

woraus

$$\partial y=\frac{2(x-a)(x-c)+(x-a)^2}{2(y-b)}$$

sich ergiebt, also $=\frac{0}{0}$ für $x=a$; so erhält man, Zähler und Nenner nach allem x differenzlirend,

$$\partial y=\frac{4(x-a)+2(x-c)}{2\cdot\partial y},$$

d. h. $\partial y^2=2(x-a)+(x-c)$ für $x=a$,

oder $\partial y=\sqrt{a-c}$, für $x=a$.

Beispiel 2. Wäre aus der Gleichung

$$3(y-b)^3-(x-a)^2=0,$$

∂y zu finden, so erhielte man

$$3(y-b)^2\cdot\partial y-2(x-a)=0$$

und

$$\partial y=\tfrac{2}{3}\cdot\frac{(x-a)}{(y-b)^2};$$

folglich für $x=a$, weil dann auch $y=b$ wird, $\partial y=\frac{0}{0}$. — Differenzlirt man aber Zähler und Nenner von diesem Quozienten $\frac{2}{3}\frac{x-a}{(y-b)^2}$ nach allem x, so erhält man,

$$\partial y=\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1}{2(y-b)\cdot\partial y},$$

also

$$\partial y^2=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{y-b}\quad\text{und}\quad\partial y=\frac{1}{\sqrt{3(y-b)}},$$

also für $x=a$, $\partial y=\frac{1}{0}$, eine im Kalkul unzuläßige Form, welche in der Anwendung zuweilen das Unendliche repräsentirt. *)

---

*) Wenn nämlich q bloß reele Werthe haben kann, so kann q unter andern Werthen nach und nach Werthe bekommen, kleiner als 1, die der Null immer näher und näher rücken, und $=\frac{1}{p}$ gesetzt, desto kleiner werden, je größer p selbst wird, während immer $\frac{1}{q}=p$

Beispiel 3. Ist gegeben

$$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0,$$

so hat man

$$4x^3 - 2axy + (3by^2 - ax^2) \cdot \partial y = 0.$$

Für $x = 0$ wird nun auch $y = 0$, und

$$\partial y = \frac{4x^3 - 2axy}{ax^2 - 3by^2} = \frac{0}{0}.$$

Differenzirt man aber den Zähler und den Nenner nach allem x, so erhält man, durch 2 hebend,

$$\partial y = \frac{6x^2 - ay - ax \cdot \partial y}{ax - 3by \cdot \partial y}, \text{ für } x = 0;$$

aus welcher Gleichung nun ∂y für $x = 0$ gefunden werden kann. Man erhält, nach ∂y geordnet,

$$3by \cdot \partial y^2 - 2ax \cdot \partial y + 6x^2 - ay = 0,$$

und diese quadratische Gleichung nach ∂y aufgelöst, gibt ∂y abermals für $x = 0$, unter der Form $\frac{0}{0}$ weshalb man nun für diesen Ausdruck aufs neue erst den wahren Werth ausmitteln muß.

§. 137. Zusatz.

Dieser letztere Uebelstand veranlaßt uns, wenn eine Ableitung ∂y, die selber noch in x und in y ausgedrückt seyn kann, die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, ihren wahren Werth wo möglich auf direktem Wege auszumitteln.

Ist aber die gegebene Gleichung

$$1)\ F_{x,y} = 0,$$

so ist ihre erste Differenzialgleichung

$$2)\ \partial F_x + \partial F_y \cdot \partial y = 0,$$

und es nimmt aus ihr die Ableitung ∂y, d. h. der Differenzialquozient $\frac{dy}{dx}$ die Form $\frac{0}{0}$ an, für gewisse Werthe von x und y,

---

ist. Also wird $\frac{1}{q}$ größer werden können, als jede noch so große Zahl, wenn q selbst der Null näher rückt, als jede noch so kleine Zahl.

wenn für dieselben ∂F_x und ∂F_y Null werden (d. h. wenn ein dem ∂F_x und dem ∂F_y gemeinschaftlicher Faktor Null wird). — Differenziirt man aber nun die Gleichung (2.) noch einmal, so erhält man, für dieselben Werthe von x und y,

$$3)\ \partial^2 F_x + 2\cdot\partial^{1,1}F_{x,y}\cdot\partial y + \partial^2 F_y\cdot\partial y^2 = 0,$$

weil das Glied $\partial F_y\cdot\partial^2 y$, wegen des Faktors ∂F_y, welcher Null wird, herausfällt.

Sollten hier wieder die Koeffizienten der Gleichung (3.) der Null gleich werden, so würde man noch einmal nach allem x differenziiren und dann

$$4)\ \partial^3 F_x + 3\cdot\partial^{2,1}F_{x,y}\cdot\partial y + 3\partial^{1,2}F_{x,y}\cdot\partial y^2 + \partial^3 F_y\cdot\partial y^3 = 0$$

erhalten, für diese Werthe von x und y, in so ferne man sogleich die Glieder wegläßt, welche höhere Ableitungen von y enthalten, deren Koeffizienten aber, für diese Werthe von x und y, der Voraussetzung zu Folge, Null sind.

Die praktische Regel, die sich hieraus ergibt, ist also diese: „Wenn die erste Differenzialgleichung für gewisse Werthe von „x und y, ∂y unter der Form $\frac{0}{0}$ giebt, so suche man die zweite, „dritte und folgenden Differenzialgleichungen, jedoch unter der „Voraussetzung, daß ∂y nach x konstant ist *) (damit sogleich „alle mit $\partial^2 y$, $\partial^3 y$, ꝛc. behafteten Glieder herausfallen oder „vielmehr gar nicht erscheinen), bis eine dieser folgenden Differenzialgleichungen zur Bestimmung von ∂y dient, d. h. ∂y nicht „mehr unter der Form $\frac{0}{0}$ liefert.

Damit aber diese Methode gelinge, wird man ebenfalls vorher die Wurzeln wegschaffen, d. h. die Gleichung zwischen x und y rational machen müssen, damit endlich der gemeinschaftliche Faktor,

*) Gebraucht man wirklich die Differenzialbezeichnung, so ist dx ohne dies konstant, also muß dann dx und dy zugleich als konstant angesehen werden.

welcher Null wird, durch das fortgesetzte Differenziiren, wirklich herausfalle.

Beispiel 1. Behandelt man danach das (Beispiel 3. zu §. 136.), wo aus

$$x^4 - ayx^2 + by^3 = 0,$$

$$(4x^3 - 2ayx) + (3by^2 - ax^2) \cdot \partial y = 0$$

gefunden worden ist, so erhält man durch weiteres Differenziiren, auch ∂y als konstant ansehend,

$$12x^2 - 2ay - 4ax \cdot \partial y + 6by \cdot \partial y^2 = 0.$$

Und weil für $x = 0$ und $y = 0$, diese Gleichung noch immer identisch $0 = 0$ ist, und zur Bestimmung von ∂y nicht dient (d. h. ∂y in der Form $\frac{0}{0}$ gibt), so erhält man durch nochmaliges Differenziiren

$$24x - 6a \cdot \partial y + 6b \cdot \partial y^3 = 0,$$

alles für $x = 0$; welche Gleichung (eben weil $x = 0$ ist) sich auf

$$(-a + b \cdot \partial y^2) \cdot \partial y = 0$$

reduzirt, und für ∂y, 3 Werthe gibt, nämlich $\partial y = 0$ und $\partial y = \pm\sqrt{\frac{a}{b}}$.

Beispiel 2. Ist gegeben die Gleichung

$$ax^3 + x^3y - ay^3 = 0;$$

und daraus zur Bestimmung von ∂y gefunden

$$3ax^2 + 3x^2y + (x^3 - 3ay^2) \cdot \partial y = 0,$$

welche für $x = 0$, $y = 0$, ∂y in der Form $\frac{0}{0}$ liefert; so erhält man durch weiteres Differenziiren, ∂y als nach x konstant ansehend,

$$6ax + 6xy + 6x^2 \cdot \partial y - 6ay \cdot \partial y^2 = 0,$$

und durch nochmaliges Differenziiren, unter derselben Beschränkung,

$$6a + 6y + 18x \cdot \partial y - 6a \cdot \partial y^3 = 0,$$

oder

$$1 - \partial y^3 = 0$$

d. h. $\partial y = 1$ und $\partial y = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3}$, für $x = 0$ und $y = 0$.

Schluß-Anmerkung.

Es wird aber das Vorgetragene ausreichen, um den Anfänger in den Stand zu setzen, in Fällen, die hier nicht weiter betrachtet worden

sind, den angeführten Prinzipien zu Folge, sich selber durchhelfen und die Werthe der Ausdrücke, die unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen, wenn solche existiren, wirklich finden zu können. —

Ein gesuchter durch z bezeichneter Ausdruck, erscheint aber häufig auch unter der Form $\frac{0}{0}$, weil er durch die Gleichung wirklich gar nicht bestimmt wird, d. h. weil die Gleichung

$$a + b \cdot z = 0,$$

welche ihn liefern soll, in der That, in so ferne $a = b = 0$ ist, für jeden Werth von z identisch wird, also zur Bestimmung von z gar nicht gebraucht werden kann.

Hat man z. B. die beiden Gleichungen

$$1)\quad az + bu = c$$

$$2)\quad a_1 z + b_1 u = c_1,$$

so findet sich daraus

$$z = \frac{b_1 c - bc_1}{ab_1 - a_1 b} \quad \text{und} \quad u = \frac{ac_1 - a_1 c}{ab_1 - a_1 b}.$$

So wie nun

$$a_1 = am, \qquad b_1 = bm, \qquad c_1 = cm$$

wird, so werden z und u unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Allein die Gleichung (2.) ist jetzt

$$amz + bmu = cm;$$

oder

$$az + bu = c$$

d. h. von der (1.) nicht verschieden. Also müssen jetzt z und u wirklich ganz unbestimmt bleiben.

Es ist daher wohl zu beachten, daß die hier beschriebenen Methoden den Werth der Form $\frac{0}{0}$ nur liefern, wenn der Ausdruck $\frac{\varphi}{\psi}$ deshalb diese Form angenommen hat, weil ein dem φ und ψ gemeinschaftlicher Faktor Null geworden ist.

Vierte Abtheilung.

Von dem Gange der Werthe einer Funktion φ eines oder mehrer Veränderlichen, wenn statt letzterer nach und nach alle stetig neben einander liegenden reelen Werthe von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin, gesetzt gedacht werden. — Von den größten und kleinsten und von den Grenz-Werthen derselben Funktion.

Vorerinnerung.

Die hier im Auge habende Untersuchung ist bereits im ersten Theile dieses Systems (§§. 263. 264. 285. 310. u. 311.) für ganze Funktionen der 4 ersten Grade zu finden, nebst den Anwendungen der Resultate auf die algebraischen Gleichungen der 4 ersten Grade. Dieselbe ist dann, aus einem allgemeinern Gesichtspunkt, für alle ganzen Funktionen von jedem beliebigen Grade (bereits Ableitungs-Theorie zu Hilfe nehmend) im zweiten Theile dieses Systems (§§. 458. 459.) wiederholt, im (§. 480.) auf ganze Funktionen zweier Veränderlichen ausgedehnt, und in den (§§. 634. — 638.) für unendliche Reihen erweitert worden. — Dieselbe soll nun für alle möglichen Funktionen wiederholt und zuletzt die Aufsuchung der größten und kleinsten Werthe aus dem allgemeinsten Standpunkt angedeutet, so wie die Bestimmung der Grenz-Werthe noch besonders gelehrt werden.

§. 138. Aufgabe.

Es ist F eine beliebige Funktion von x; man soll den Gang der Werthe von F_x, für alle reelen Werthe von x, wie solche von $+\infty$ bis zu $-\infty$ hin stetig auf einander folgend gesetzt gedacht werden, bestimmen.

Auflösung.

1) Wird h im Moment des Verschwindens gedacht, so drückt $x+h$ den, dem x nächst vorhergehenden und auch den nächstfolgenden Werth von x aus, wenn h einmal negativ und dann positiv genommen wird. Diese zu $x+h$ gehörigen Werthe von F werden durch F_{x+h} vorgestellt, und man hat, nach dem Taylor'schen Lehrsatze:

menden Wurzeln, oder die Logarithmanden der darin vorkommenden Logarithmen jeder beliebigen negativen Zahl gleich, so erhält man die Gleichungen, für alle diejenigen **reelen** Werthe von x (wenn solche existiren), die in (N. 2.) ausgenommen worden sind. — Diese Werthe machen dann entweder F_x oder ∂F_x oder $\partial^2 F_x$ oder irgend eine der übrigen Ableitungen imaginär, und dann ist von dem Gange der reelen Werthe von F_x nicht mehr die Rede, weil entweder F_x selbst schon imaginär, oder doch im Begriff ist, in das jetzt imaginäre F_{x+h} überzugehen. — Oder es machen diese Werthe von x, weder F_x noch irgend eine der Ableitungen ∂F_x, $\partial^2 F_x$, ... $\partial^n F_x$, ... imaginär, sondern bringen bloß eine der Ableitungen ∂F_x, $\partial^2 F_x$, etc., aber nicht F_x selbst, auf die Form $\frac{1}{0}$, oder $log\ 0$, oder auf irgend eine andere, im Kalkul nicht zuläßige Form, — und nun muß man den Unterschied $F_{x+h} - F_x$, weil er jetzt nicht mehr nach ganzen Potenzen von h fortläuft, direkt (wenn es angeht) in eine nach steigenden, aber gebrochenen positiven Potenzen *) von h fortlaufende Reihe verwandeln, übrigens dann, genau wie in (N. 2.) verfahrend, nachsehen, ob das erste Glied dieses Unterschiedes $F_{x+h} - F_x$ mit h zugleich sein (+) oder (—) Zeichen ändert, oder nicht. Nur im letztern Fall ist für diesen Werth von x, unser F_x ein **Maximum** (wenn dieses erste Glied **negativ** ist), oder ein **Minimum** (im Fall, dieses erste Glied des Unterschiedes $F_{x+h} - F_x$, **positiv** seyn sollte).

§. 139. Zusatz.

Da wir aber aus (§§. 100. u. 101.) wissen, daß auch für solche Werthe von x, welche F_{x+h} in eine nach positiven gebrochenen Potenzen von h fortlaufende Reihe übergehen machen, die Differenz $F_{x+h} - F_x$ noch immer mit $\partial F_x \cdot h$ anfängt, so oft

---

*) **Negative** Potenzen von h können nach (§. 102.) deshalb nicht vorkommen, weil F_x noch einen bestimmten Werth haben soll.

der Exponent der ersten gebrochenen Potenz >1 ist, so folgt, daß in diesem Falle noch immer für $x = a$

$$\partial F_x = 0$$

seyn muß, wenn $x = a$ selbst ein Werth von x seyn soll, welcher F_x zu einem Maximum oder Minimum macht.

Also bleiben nur noch diejenigen Werthe von x übrig, welche F_x zu einem Maximum oder Minimum machen, für welche aber der Unterschied

$$F_{x+h} - F_x$$

mit einer gebrochenen Potenz von h beginnt, deren Exponent kleiner als 1 ist; und für welche Werthe von x, ∂F_x deshalb nicht $= 0$ werden kann, weil dann nach (§. 101.) dasselbe $\partial F_x = \frac{1}{0}$ ist.

§. 140. Zusatz.

Es ergiebt sich daher für die Aufsuchung der reelen Werthe von x, welche F_x zu einem Maximum oder Minimum machen, die praktische Regel.

1) Man suche alle die reelen Werthe von x, welche der Gleichung

$$\partial F_x = 0 \qquad \text{genügen.}$$

2) Man suche auch noch alle die Werthe von x, welche

$$\partial F_x = \frac{1}{0}$$

machen, d. h. welche den Nenner von ∂F_x (wenn ein solcher vorhanden ist) $= 0$ machen.

3) Für jeden einzelnen der in (1. und 2.) erhaltenen Werthe von x, untersuche man entweder nach (§. 138. N. 2.) oder direkt, ob $F_{x+h} - F_x$, oder das erste wirkliche Glied der, nach steigenden Potenzen von h fortlaufenden Entwicklungsreihe dieses Unterschiedes, mit h zugleich das ($+$ oder $-$) Zeichen wechselt, oder nicht. Nur im letztern Fall ist F_x ein Maximum oder ein Minimum, und zwar das erstere, wenn das gedachte erste Glied beständig negativ, das letztere, wenn dasselbe Glied beständig positiv ist.

Beispiel 1. Ist $F = (b - x) \cdot x$, *) so ist $\partial F_x = b - 2x = 0$; also $x = \frac{1}{2}b$; dann ist $\partial^2 F_x = -2$, folglich negativ; also F für $x = \frac{1}{2}b$ ein Maximum.

Beispiel 2. Ist $F = b + c(x - a)^n$, so ist $\partial F_x = nc(x-a)^{n-1}$ $= \frac{nc}{(x-a)^{1-n}}$. — Ist nun $n - 1$ negativ, so gibt $\partial F_x = \frac{1}{0}$, den Werth $x = a$; und ist $n - 1$ positiv, so gibt $\partial F_x = 0$, wiederum $x = a$.

Ob aber für diesen Werth von x, $\partial^2 F_x$ positiv, negativ oder 0 werde, kann man nicht wissen, so lange nicht n einen bestimmten Werth hat. Man wird daher, ist n noch allgemein, am besten thun, direkt $(F_x)_{a+h} = b + c \cdot h^n$ zu finden, während $(F_x)_a = b$ bereits gefunden ist. Bleibt nun der Unterschied $F_{x+h} - F_x = ch^n$ beständig positiv, man mag h positiv oder negativ nehmen, oder beständig negativ, so ist F_x im erstern Fall ein Minimum, im andern dagegen ein Maximum. Sollte jedoch $c \cdot h^n$ mit h zugleich sein ($+$ oder $-$) Zeichen ändern, so ist F_x für $x = a$ weder ein Maximum, noch ein Minimum. Es wird aber ch^n mit h zugleich sein Zeichen ändern, wenn n eine positive ganze und ungerade Zahl ist, oder wenn $n = \frac{p}{q}$ ist, dabei aber q und p zugleich ungerade. Und ch^n wird von dem ($+$ oder $-$) Zeichen des h unabhängig seyn, wenn n positiv, ganz und gerade, oder gebrochen $= \frac{p}{q}$ ist, dabei aber q eine ungerade, und p eine gerade Zahl ist. **)

---

*) Wenn z. B. unter allen Rechtecken, deren Umfang gegeben und $2b$ ist, dasjenige herausgesucht werden soll, welches den kleinsten Inhalt F_x hat.

**) Soll $F_{x+h} - F_x$ allemal reel werden, so kann der Nenner q nie eine gerade Zahl seyn (vorausgesetzt, daß $\frac{p}{q}$ in seinen kleinsten Zahlen ausgedrückt ist), da sonst h^n d. h. jetzt $h^{\frac{p}{q}}$ oder $\sqrt[q]{(h^p)}$ (weil h^p mit h sein Zeichen ändert) bald reel, bald imaginär wird, so daß nun von einem Maximum oder Minimum nicht mehr die Rede seyn kann.

Beispiel 3. Ist $F_x = \frac{x-1}{x^2+1}$ gegeben, so hat man

$$\partial F_x = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

Und die Gleichung $\partial F_x = 0$ gibt daher

$$x^2-2x-1=0 \quad \text{d. h.} \quad x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Nun ist aber

$$\partial^2 F_x = 2\frac{1-3x-3x^2+x^3}{(1+x^2)^3}$$

und wird für diese Werthe von x

$$= \frac{-1 \mp \sqrt{2}}{(2 \pm \sqrt{2})^3} = \frac{\mp \frac{1}{2}\sqrt{2}}{(2 \pm \sqrt{2})^2}, \text{*)}$$

also positiv für $x = 1-\sqrt{2}$, und negativ, wenn $x = 1+\sqrt{2}$ ist. Die Funktion F_x ist also für $x = 1+\sqrt{2}$ ein Maximum, für $x = 1-\sqrt{2}$ dagegen ein Minimum.

Die Gleichung $\partial F_x = \frac{1}{0}$ d. h. $1+x^2 = 0$, gibt x imaginär, und noch überdies auch F_x in der Form $\frac{1}{0}$. Einer dieser beiden Umstände allein wäre aber hinreichend, uns zu bewegen, hier keine größten und kleinsten Werthe von F_x mehr zu suchen.

Beispiel 4. Ist $F_x = x^m \cdot (a-x)^n$, so ist

$$\partial F_x = x^{m-1}(a-x)^{n-2}[m(a-x)-nx] = 0$$

und daraus

I. $x^{m-1} = 0$, oder II. $(a-x)^{n-1} = 0$, oder III. $ma-mx-nx = 0$

d. h. 1) $x = 0$, wenn $m-1$ positiv;

2) $x = a$, wenn $n-1$ positiv;

3) $x = \frac{ma}{m+n}$, $a-x = \frac{na}{m+n}$.

Um nun den ersten Werth $x = 0$ zu prüfen, setze man $0+h$ d. h. h statt x, und erhält für ein im Moment des Verschwindens gedachtes h

$$F_{x+h} - F_x = h^m(a-h)^n,$$

welcher Unterschied mit h sein Zeichen nicht ändert, wenn m von der

*) Wenn man Zähler und Nenner mit $2 \mp \sqrt{2}$ multiplizirt.

III. Ist endlich F eine mittelbare Funktion von x, also durch $F_{(x)}$ bezeichnet, und zwar eine unmittelbare Funktion F_z von z, während z wiederum eine Funktion von x ist, so hat man

$$\partial F_{(x)} = \partial F_z \cdot \partial z_x;$$

also daß $\partial F_{(x)} = 0$ wird, entweder weil

$$\partial F_z = 0 \quad \text{oder} \quad \partial z_x = 0 \quad \text{ist.}$$

Ferner ist dann

$$\partial^2 F_{(x)} = \partial^2 F_z \cdot \partial z_x^2 + \partial F_z \cdot \partial^2 z_x.$$

Ist nun $\partial F_z = 0$, so hat man, für diese Werthe von x, welche $\partial F_{(x)}$ dadurch zu Null machen, daß $\partial F_z = 0$ wird, bloß

$$\partial^2 F_{(x)} = \partial^2 F_z \cdot \partial z_x^2;$$

so daß das Maximum oder Minimum, weil ∂z_x^2 positiv vorausgesetzt werden darf, bloß von $\partial^2 F_z$ abhängt. — Für die andern Werthe von x aber, welche $\partial F_{(x)}$ dadurch zu Null machen, daß $\partial z_x = 0$ wird, kann man bloß

$$\partial^2 F_{(x)} = \partial F_z \cdot \partial^2 z_x \qquad \text{nehmen.}$$

In den nächsten Beispielen mag nun der Anfänger diese Abkürzungen in Anwendung zu bringen versuchen.

Beispiel 1. Ist $F_x = \frac{3x-5}{x^2-1}$, so hat man

$$\partial F_x = \frac{-3x^2+10x-3}{(x^2-1)^2}, \quad \partial^2 F_x = 2 \cdot \frac{3x^3-15x^2+9x-5}{(x^2-1)^3}.$$

Aus $\partial F_x = 0$ d. h. $3x^2 - 10x + 3 = 0$, wird nun $x = 3$ und $x = \frac{1}{3}$, und für diese Werthe von x, wird $\partial^2 F_x = -\frac{1}{8}$ und $\partial^2 F_x = +\frac{81}{8}$; folglich ist für $x = 3$, F_x ein Maximum, dagegen für $x = \frac{1}{3}$, F_x ein Minimum.

Und die Gleichung $\partial F_x = \frac{1}{0}$ gibt noch $x^2 - 1 = 0$, oder $x = +1$ und $x = -1$; allein für diese Werthe ist hier nicht mehr von einem Maximo oder Minimo die Rede.

Beispiel 2. Ist $F_x = \frac{log\,x}{x^n}$, so ist $\partial F_x = \frac{1 - n \cdot log\,x}{x^{n+1}}$; folglich aus $\partial F_x = 0$, $1 - n \cdot log\,x = 0$, $log\,x = \frac{1}{n}$, und $x = e^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{e}$.

Und dann findet sich, nach (§. 141. I.),

$$\partial^2 F_x = -\frac{n + (n+1)(1 - n\,log\,x)}{x^{n+2}} = -\frac{n}{x^{n+2}}$$

für $x = e^{\frac{1}{n}}$; also F_x ein Maximum, wenn n positiv ist, ein Minimum, wenn n negativ.

Beispiel 3. Ist $F_x = \frac{x}{b^x}$, so hat man $\partial F_x = \frac{1 - x \cdot log\,b}{b^x}$. Folglich aus $\partial F_x = 0$, jetzt $x = \frac{1}{log\,b}$; und für diesen Werth von x, wird, nach (§. 141. I.),

$$\partial^2 F_x = -\frac{log\,b}{b^x} = -\frac{log\,b}{e},$$

weil $b^x = e^{x\,log\,b} = e^1 = e$ wird; und dieses $\partial^2 F_x$ ist nun positiv, folglich F_x ein Minimum, wenn $b < 1$ ist, dagegen ist dieses $\partial^2 F_x$ negativ, folglich F_x ein Maximum, wenn $b > 1$ ist.

Beispiel 4. Ist $F_x = x^{\frac{1}{x}}$, so ist $\partial F_x = x^{\frac{1}{x} - 2}(1 - log\,x)$; also $1 - log\,x = 0$, $x = e$; und für diesen Werth von x, nach (§. 141. II.), $\partial^2 F_x = -x^{\frac{1}{x} - 3} = -\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^3}$ negativ, folglich F_x für $x = e$ ein Maximum.

Beispiel 5. Ist $F_x = \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha}$, so ist $\partial F_x = \frac{x - b \cdot Cos\,\alpha}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha}}$; folglich aus $\partial F_x = 0$, jetzt $x - b \cdot Cos\,\alpha = 0$, $x = b \cdot Cos\,\alpha$; und für diesen Werth von x, nach (§. 141. I.), $\partial^2 F_x = \frac{1}{\sqrt{b^2 + x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha}}$.

Dieses $\partial^2 F_x$ ist aber allemal positiv, so lange in F_x die positive

Wurzel gemeint ist, und daher F_x ein Minimum, für diesen Werth von x. *)

Setzt man aber hier $\partial F_x = \frac{1}{0}$, d. h. $\sqrt{b^2+x^2-2bx\cdot Cos\,\alpha} = 0$, so wird

$$x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha + b^2 = 0,$$

$$x = b \cdot Cos\,\alpha \pm \sqrt{-b^2 \cdot Sin\,\alpha^2},$$

also imaginär; mithin gibt diese Gleichung weder ein Größtes noch ein Kleinstes, in dem Sinne, wie solches hier verlangt wird.

Beispiel 6. Ist

$$F_x = \sqrt{b^2+x^2-2bx\cdot Cos\,\alpha} + \sqrt{a^2+x^2-2ax\cdot Cos\,\alpha},$$

so ist

$$\partial F_x = \frac{x - b\cdot Cos\,\alpha}{\sqrt{b^2+x^2-2bx\cdot Cos\,\alpha}} + \frac{x - a\cdot Cos\,\alpha}{\sqrt{a^2+x^2-2ax\cdot Cos\,\alpha}},$$

folglich aus $\partial F_x = 0$, jetzt

$$(x - b\cdot Cos\,\alpha)\sqrt{a^2+x^2-2ax\cdot Cos\,\alpha}$$
$$+ (x - a\cdot Cos\,\alpha)\sqrt{b^2+x^2-2bx\cdot Cos\,\alpha} = 0;$$

---

*) Dieses F_x bekommt man aber, wenn in dem Dreiecke ACB, AC = b, CAB = α gegeben ist, und nun die Seite AB = x so gesucht wird, daß die Seite BC = F_x ein Maximum oder Minimum wird. Und da $x = b\cdot Cos\,\alpha$ gefunden worden, so ist nothwendig W. ABC ein rechter Winkel, so oft BC ein Kleinstes wird.

Allein bei allen Anwendungen auf Größen, muß man allemal noch untersuchen, ob die Werthe, welche der analytisch gestellten Aufgabe genügen, auch den übrigen, nicht analytisch ausgedrückten, aber deshalb doch vorhandenen Bedingungen genügen. Ist z. B. α ein stumpfer Winkel, so bleibt für $x = b\cdot Cos\,\alpha$, das gegebene F_x, nämlich $+\sqrt{b^2+x^2-2bx\cdot Cos\,\alpha}$ oder jetzt $b\cdot Sin\,\alpha$, noch immer ein Kleinstes, in so ferne es für jeden andern Werth von x, und namentlich für die beiden nächstanliegenden Werthe x+h von x, noch immer größer wird. Weil aber α stumpf ist, so darf die Seite BC nicht kleiner als b werden, wenn die geometrische Aufgabe möglich seyn soll. Weil also der gefundene Werth von x dasmal dieser unerläßlichen geometrischen Bedingung nicht genügt, so ist die geometrische Aufgabe nicht möglich, so oft α ein stumpfer Winkel ist.

und diese Gleichung gibt

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{2ab \cdot Cos\,\alpha}{a + b}.$$

Ferner wird

$$\partial^2 F_x = \frac{b^2\,Sin\,\alpha^2}{(b^2 + x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2\,Sin\,\alpha^2}{(a^2 + x^2 - 2ax \cdot Cos\,\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

folglich für diese Werthe von x nothwendig positiv, so lange in F_x selbst jede der Quadratwurzeln ihren positiven Werth bedeutet; also dann auch für jeden dieser beiden Werthe von x, F_x ein Minimum. *)

Beispiel 7. Ist $F_x = \pi - \frac{1}{Tg}\,\frac{x \cdot Sin\,\alpha}{x \cdot Cos\,\alpha - b} - \frac{1}{Tg}\,\frac{x \cdot Sin\,\alpha}{a - x \cdot Cos\,\alpha}$, so wird

$$\partial F_x = Sin\,\alpha \left[\frac{b}{x^2 + b^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha} - \frac{a}{x^2 + a^2 - 2ax \cdot Cos\,\alpha}\right];$$

folglich geht dasmal $\partial F_x = 0$ über in

$$(b - a) \cdot x^2 + ba^2 - ab^2 = 0,$$

so daß $\qquad x = \sqrt{ab} \qquad$ wird.

Ferner hat man

---

*) Man gelangt aber unter andern auch zu dieser analytischen Aufgabe, wenn in der gegebenen Richtung (Fig. 3.) DK ein Punkt E so gefunden werden soll, daß die Summe der von zwei gegebenen Punkten A und B nach ihm gezogenen Linien AE und BE den kleinsten Werth habe. — Macht nämlich AB mit DE den Winkel α, und ist CA = b, CB = a und CE = x, so wird BE + AE unserm obigen F_x gleich. — Der Werth x = 0, welcher F_x ebenfalls zu einem Kleinsten macht, löst aber nicht diese geometrische Aufgabe, welche vorausgesetzt hat, daß E nicht in C liege. Dagegen löst der Werth

$$x = \frac{2ab \cdot Cos\,\alpha}{a + b} = CE$$

die analytische und geometrische Aufgabe zugleich; und wenn man für diesen Werth von CE = x, die Winkel BEK und AEC berechnet, so finden sich beide einander gleich. Der gesuchte Punkt E liegt also da, wo die Linien AE und BE mit der gegebenen DK gleiche Winkel bilden.

$$\partial^2 F_x = 2 Sin\,\alpha \left[\frac{b(b \cdot Cos\,\alpha - x)}{(x^2 + b^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha)^2} - \frac{a(x - a \cdot Cos\,\alpha)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cdot Cos\,\alpha)^2}\right]$$

$$= -\frac{2(a-b) \cdot Sin\,\alpha}{[a + b - 2\,Cos\,\alpha \cdot \sqrt{ab}]^2 \cdot \sqrt{ab}}, \quad \text{für } x = \sqrt{ab};$$

folglich ist $\partial^2 F_x$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{2(a-b) \cdot Sin\,\alpha}{\sqrt{ab}}$ negativ oder positiv ist. *)

Beispiel 8. Soll $\frac{1}{2} b\, Sin\,\alpha \cdot \frac{(a+x)^2}{x}$ ein Maximum oder ein Minimum werden, so kann man bloß $F_x = \frac{(a+x)^2}{x}$ nehmen, weil, wenn letzteres ein Maximum oder ein Minimum ist, solches offenbar auch der erstere Ausdruck seyn wird. Aus $F_x = \frac{(a+x)^2}{x}$ wird der $\partial F_x = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$, also $x^2 - a^2 = 0$, $x = \pm a$. Und $\partial^2 F_x = \frac{2}{x}$, für diese Werthe von x. Also ist F_x ein Maximum, wenn $x = -a$ und ein Minimum, wenn $x = +a$ genommen wird, unter der Voraussetzung jedoch, daß a selbst positiv ist. **)

---

*) Wird der Punkt E gesucht, so daß (Fig. 3.) W. AEB der größte oder kleinste ist, während man CA = b, CB = a, BCE = α gegeben hat, und CE = x gesucht ist, so wird W. AEB = dem obigen F_x. — Folglich ist für $x = \sqrt{ab}$, d. h. wenn CE die mittlere Proportionale ist zwischen CA und CB, dieser Winkel AEB wirklich der größeste, weil jetzt $\partial^2 F_x$ für $x = \sqrt{ab}$ nothwendig negativ wird.

Und dieser Punkt E wird auch gefunden, wenn man eine Kreislinie konstruirt, welche durch die beiden Punkte A und B hindurchgeht und zugleich die Linie CD berührt; da wo sie CD berührt ist der gesuchte Punkt E.

**) Wird z. B. ein Winkel EDC = α (Fig. 4) durch den mittelst DG = a und GP = b und PGC = α gegebenen Punkt P, eine Linie PK (GK = x) zu ziehen verlangt, welche das Dreieck BDK zu einem größten macht, so führt dies zu der obigen analytischen Aufgabe. Die hiesige geometrische wird natürlich nur durch den einen Werth von x, x = +a, gelöst.

Beispiel 9. Ist $F_x = c + \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$, so wird $\partial F_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, also aus $\partial F_x = 0$, jetzt $a - x = 0$, oder $x = a$.

Und für diesen Werth von x, wird $\partial^2 F_x = -\frac{b}{a\sqrt{2ax-x^2}}$, also negativ, d. h. F_x ein Maximum, so oft die Wurzel in F_x selbst ihren positiven Werth vorstellt; dagegen F_x ein Minimum, weil $\partial^2 F_x$ positiv wird, sobald in F_x selbst die Wurzel ihren negativen Werth vorstellt; a und b positiv vorausgesetzt.

Und die Gleichung $\partial F_x = \frac{1}{0}$ gibt hier noch $2ax - x^2 = 0$, d. h. $x = 0$ und $x = 2a$.

Setzt man nun, um den ersten Werth $x = 0$ zu prüfen, $0 + h$ d. h. h statt x, so hat man

$$F_{x+h} - F_x = \frac{b}{a}\sqrt{2ah - h^2} = \frac{b}{a}[(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}} - \cdots\cdot],$$

wo das erste Glied $(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}}$ anzeigt, daß weder ein Maximum noch ein Minimum statt findet, sondern daß dieser Werth von x ein Grenz-Werth ist, wo F_x vom reelen in das imaginäre übergeht. — Und setzt man, um den andern Werth $x = 2a$ zu prüfen $2a + h$ statt x, so wird

$$F_{x+h} - F_x = \frac{b}{a}\sqrt{-2ah - h^2} = \frac{b}{a}[(2a^{\frac{1}{2}})(-h)^{\frac{1}{2}} - \cdots\cdot],$$

welches ebenfalls einen solchen Grenz-Werth andeutet. *)

Beispiel 10. Ist $F_x = c + \sqrt[3]{(2ax - x^2)^2}$, so wird $\partial F_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a-x}{\sqrt[3]{2ax-x^2}}$; also aus $\partial F_x = 0$, $a - x = 0$ oder $x = a$.

---

*) Es drückt aber dieses F_x die zu x als Abscisse gehörige Ordinate einer Ellipse aus, wenn, wie hier oben vorausgesetzt wurde, b und a positiv genommen sind. Die gefundenen Werthe von x lehren also die Punkte in der Abscissen-Axe kennen, wo die Ordinaten-Werthe F_x vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen übergehen.

Wurzel gemeint ist, und daher F_x ein Minimum, für diesen Werth von x. *)

Setzt man aber hier $\partial F_x = \frac{1}{0}$, d. h. $\sqrt{b^2+x^2-2bx \cdot Cos\,\alpha} = 0$,

so wird $$x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha + b^2 = 0,$$

$$x = b \cdot Cos\,\alpha \pm \sqrt{-b^2 \cdot Sin\,\alpha^2},$$

also imaginär; mithin gibt diese Gleichung weder ein Größtes noch ein Kleinstes, in dem Sinne, wie solches hier verlangt wird.

Beispiel 6. Ist

$$F_x = \sqrt{b^2+x^2-2bx \cdot Cos\,\alpha} + \sqrt{a^2+x^2-2ax \cdot Cos\,\alpha},$$

so ist

$$\partial F_x = \frac{x - b \cdot Cos\,\alpha}{\sqrt{b^2+x^2-2bx \cdot Cos\,\alpha}} + \frac{x - a \cdot Cos\,\alpha}{\sqrt{a^2+x^2-2ax \cdot Cos\,\alpha}},$$

folglich aus $\partial F_x = 0$, jetzt

$$(x - b \cdot Cos\,\alpha)\sqrt{a^2+x^2-2ax \cdot Cos\,\alpha} + (x - a \cdot Cos\,\alpha)\sqrt{b^2+x^2-2bx \cdot Cos\,\alpha} = 0;$$

---

*) Dieses F_x bekommt man aber, wenn in dem Dreiecke ACB, AC = b, CAB = α gegeben ist, und nun die Seite AB = x so gesucht wird, daß die Seite BC = F_x ein Maximum oder Minimum wird. Und da $x = b \cdot Cos\,\alpha$ gefunden worden, so ist nothwendig W. ABC ein rechter Winkel, so oft BC ein Kleinstes wird.

Allein bei allen Anwendungen auf Größen, muß man allemal noch untersuchen, ob die Werthe, welche der analytisch gestellten Aufgabe genügen, auch den übrigen, nicht analytisch ausgedrückten, aber deshalb doch vorhandenen Bedingungen genügen. Ist z. B. α ein stumpfer Winkel, so bleibt für $x = b \cdot Cos\,\alpha$, das gegebene F_x, nämlich $+\sqrt{b^2+x^2-2bx \cdot Cos\,\alpha}$ oder jetzt $b \cdot Sin\,\alpha$, noch immer ein Kleinstes, in so ferne es für jeden andern Werth von x, und namentlich für die beiden nächstanliegenden Werthe x+h von x, noch immer größer wird. Weil aber α stumpf ist, so darf die Seite BC nicht kleiner als b werden, wenn die geometrische Aufgabe möglich seyn soll. Weil also der gefundene Werth von x dasmal dieser unerläßlichen geometrischen Bedingung nicht genügt, so ist die geometrische Aufgabe nicht möglich, so oft α ein stumpfer Winkel ist.

und diese Gleichung gibt

$$x = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{2ab \cdot Cos\,\alpha}{a + b}.$$

Ferner wird

$$\partial^2 F_x = \frac{b^2 Sin\,\alpha^2}{(b^2 + x^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha)^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^2 Sin\,\alpha^2}{(a^2 + x^2 - 2ax \cdot Cos\,\alpha)^{\frac{3}{2}}},$$

folglich für diese Werthe von x nothwendig positiv, so lange in F_x selbst jede der Quadratwurzeln ihren positiven Werth bedeutet; also dann auch für jeden dieser beiden Werthe von x, F_x ein Minimum. *)

Beispiel 7. Ist $F_x = \pi - \frac{1}{Tg} \frac{x \cdot Sin\,\alpha}{x \cdot Cos\,\alpha - b} - \frac{1}{Tg} \frac{x \cdot Sin\,\alpha}{a - x \cdot Cos\,\alpha}$, so wird

$$\partial F_x = Sin\,\alpha \left[\frac{b}{x^2 + b^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha} - \frac{a}{x^2 + a^2 - 2ax \cdot Cos\,\alpha} \right];$$

folglich geht dasmal $\partial F_x = 0$ über in

$$(b - a) \cdot x^2 + ba^2 - ab^2 = 0,$$

so daß $\quad x = \sqrt{ab} \quad$ wird.

Ferner hat man

---

*) Man gelangt aber unter andern auch zu dieser analytischen Aufgabe, wenn in der gegebenen Richtung (Fig. 3.) DK ein Punkt E so gefunden werden soll, daß die Summe der von zwei gegebenen Punkten A und B nach ihm gezogenen Linien AE und BE den kleinsten Werth habe. — Macht nämlich AB mit DE den Winkel α, und ist $CA = b$, $CB = a$ und $CE = x$, so wird $BE + AE$ unserm obigen F_x gleich. — Der Werth $x = 0$, welcher F_x ebenfalls zu einem Kleinsten macht, löst aber nicht diese geometrische Aufgabe, welche vorausgesetzt hat, daß E nicht in C liege. Dagegen löst der Werth

$$x = \frac{2ab \cdot Cos\,\alpha}{a + b} = CE$$

die analytische und geometrische Aufgabe zugleich; und wenn man für diesen Werth von $CE = x$, die Winkel BEK und AEC berechnet, so finden sich beide einander gleich. Der gesuchte Punkt E liegt also da, wo die Linien AE und BE mit der gegebenen DK gleiche Winkel bilden.

$$\partial^2 F_x = 2 \, Sin\,\alpha \left[\frac{b(b \cdot Cos\,\alpha - x)}{(x^2 + b^2 - 2bx \cdot Cos\,\alpha)^2} - \frac{a(x - a \cdot Cos\,\alpha)}{(x^2 + a^2 - 2ax \cdot Cos\,\alpha)^2} \right]$$

$$= - \frac{2(a-b) \cdot Sin\,\alpha}{[a + b - 2\,Cos\,\alpha \cdot \sqrt{ab}]^2 \cdot \sqrt{ab}}, \quad \text{für } x = \sqrt{ab};$$

folglich ist $\partial^2 F_x$ positiv oder negativ, je nachdem $\frac{2(a-b) \cdot Sin\,\alpha}{\sqrt{ab}}$ negativ oder positiv ist. *)

Beispiel 8. Soll $\frac{1}{2} b \, Sin\,\alpha \cdot \frac{(a+x)^2}{x}$ ein Maximum oder ein Minimum werden, so kann man bloß $F_x = \frac{(a+x)^2}{x}$ nehmen, weil, wenn letzteres ein Maximum oder ein Minimum ist, solches offenbar auch der erstere Ausdruck seyn wird. Aus $F_x = \frac{(a+x)^2}{x}$ wird aber $\partial F_x = \frac{x^2 - a^2}{x^2}$, also $x^2 - a^2 = 0$, $x = \pm a$. Und $\partial^2 F_x = \frac{2}{x}$, für diese Werthe von x. Also ist F_x ein Maximum, wenn $x = -a$ und ein Minimum, wenn $x = +a$ genommen wird, unter der Voraussetzung jedoch, daß a selbst positiv ist. **)

---

*) Wird der Punkt E gesucht, so daß (Fig. 3.) W. AEB der größte oder kleinste ist, während man CA = b, CB = a, BCE = α gegeben hat, und CE = x gesucht ist, so wird W. AEB = dem obigen F_x. — Folglich ist für $x = \sqrt{ab}$, d. h. wenn CE die mittlere Proportionale ist zwischen CA und CB, dieser Winkel AEB wirklich der größeste, weil jetzt $\partial^2 F_x$ für $x = \sqrt{ab}$ nothwendig negativ wird.

Und dieser Punkt E wird auch gefunden, wenn man eine Kreislinie konstruirt, welche durch die beiden Punkte A und B hindurchgeht und zugleich die Linie CD berührt; da wo sie CD berührt ist der gesuchte Punkt E.

**) Wird z. B. ein Winkel EDC = α (Fig. 4) durch den mittelst DG = a und GP = b und PGC = α gegebenen Punkt P, eine Linie PK (GK = x) zu ziehen verlangt, welche das Dreieck BDK zu einem größten macht, so führt dies zu der obigen analytischen Aufgabe. Die hiesige geometrische wird natürlich nur durch den einen Werth von x, $x = +a$, gelöst.

Beispiel 9. Ist $F_x = c + \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2}$, so wird $\partial F_x = \frac{b}{a} \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, also aus $\partial F_x = 0$, jetzt $a - x = 0$, oder $x = a$.

Und für diesen Werth von x, wird $\partial^2 F_x = -\frac{b}{a\sqrt{2ax-x^2}}$, also negativ, d. h. F_x ein Maximum, so oft die Wurzel in F_x selbst ihren positiven Werth vorstellt; dagegen F_x ein Minimum, weil $\partial^2 F_x$ positiv wird, sobald in F_x selbst die Wurzel ihren negativen Werth vorstellt; a und b positiv vorausgesetzt.

Und die Gleichung $\partial F_x = \frac{1}{0}$ gibt hier noch $2ax - x^2 = 0$, d. h. $x = 0$ und $x = 2a$.

Setzt man nun, um den ersten Werth $x = 0$ zu prüfen, $0 + h$ d. h. h statt x, so hat man

$$F_{x+h} - F_x = \frac{b}{a}\sqrt{2ah - h^2} = \frac{b}{a}[(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}} - \ldots],$$

wo das erste Glied $(2a)^{\frac{1}{2}} \cdot h^{\frac{1}{2}}$ anzeigt, daß weder ein Maximum noch ein Minimum statt findet, sondern daß dieser Werth von x ein Grenz-Werth ist, wo F_x vom reelen in das imaginäre übergeht. — Und setzt man, um den andern Werth $x = 2a$ zu prüfen $2a + h$ statt x, so wird

$$F_{x+h} - F_x = \frac{b}{a}\sqrt{-2ah - h^2} = \frac{b}{a}[(2a^{\frac{1}{2}})(-h)^{\frac{1}{2}} - \ldots],$$

welches ebenfalls einen solchen Grenz-Werth andeutet. *)

Beispiel 10. Ist $F_x = c + \sqrt[3]{(2ax - x^2)^2}$, so wird $\partial F_x = \frac{4}{3} \cdot \frac{a-x}{\sqrt[3]{2ax-x^2}}$; also aus $\partial F_x = 0$, $a - x = 0$ oder $x = a$.

---

*) Es drückt aber dieses F_x die zu x als Abscisse gehörige Ordinate einer Ellipse aus, wenn, wie hier oben vorausgesetzt wurde, b und a positiv genommen sind. Die gefundenen Werthe von x lehren also die Punkte in der Abscissen-Axe kennen, wo die Ordinaten-Werthe F_x vom Wachsen zum Abnehmen, oder vom Abnehmen zum Wachsen übergehen.

Und für diesen Werth von x, $\partial^2 F_x = -\frac{4}{3\sqrt[3]{2ax-x^2}} = -\frac{4}{3\sqrt[3]{a^2}}$, mithin F_x ein Maximum.

Die Gleichung $\partial F_x = \frac{1}{0}$ gibt dasmal $2ax - x^2 = 0$, d. h. $x = 0$, und $x = 2a$. Und setzt man nun, um den Werth $x = 0$ zuerst zu prüfen, $0+h$ statt x, so erhält man, für $x = 0$,

$$F_{x+h} - F_x = (2ah - h^2)^{\frac{2}{3}} = (2a)^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{2}{3}} + \cdots\cdot,$$

nach dem binomischen Lehrsatze, welches allemal positiv ist, wenn a positiv; also ist für $x = 0$, F_x ein Minimum.

Um aber den andern Werth $x = 2a$ zu prüfen, setzt man $2a+h$ statt x und erhält für $x = 2a$,

$$F_{x+h} - F_x = (-2ah - h^2)^{\frac{2}{3}} = (2ah + h^2)^{\frac{2}{3}}$$
$$= (2a)^{\frac{2}{3}} \cdot h^{\frac{2}{3}} + \cdots\cdots$$

und es ist daher wiederum F_x, für $x = 2a$, ein Minimum. *)

Beispiel 11. Soll $\pi \cdot x \cdot \sqrt{x^2 + \frac{9a^2}{\pi^2 x^4}}$ ein Maximum oder Minimum werden, so kann man solchen Ausdruck in $\pi\sqrt{x^4 + \frac{9a^2}{\pi^2 x^2}}$ umwandeln; dann aber bloß die Werthe von x suchen, welche den Radikanden $x^4 + \frac{9a^2}{\pi^2 x^2}$ zum Maximum oder Minimum machen, weil dann der Ausdruck selbst, wenn er nicht imaginär wird, ein Maximum oder Minimum werden muß.

Setzt man also $F_x = x^4 + \frac{9a^2}{\pi^2 x^2}$, so wird $\partial F_x = 4x^3 - \frac{18a^2}{\pi^2 x^3}$, so daß $\partial F_x = 0$ gibt: $4\pi^2 x^6 - 18a^2 = 0$, $2\pi \cdot x^3 = 3a \cdot \sqrt{2}$ und $x = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi} \cdot \sqrt{2}}$, so daß x 6 Werthe bekommt, von denen zwei reel, und der eine positiv (für $+\sqrt{2}$), der andere eben so groß aber

---

*) Es ist aber F_x jetzt die zur Abscisse x gehörige Ordinate einer algebraischen Linie der 4ten Ordnung; und die gefundenen Werthe von x bezeichnen die Stellen, wo diese Ordinaten-Werthe vom Wachsen zum Abnehmen oder vom Abnehmen zum Wachsen übergehen.

negativ ist (für $-\sqrt{2}$). — Ferner findet sich $\partial^2 F_x = 12x^2 + \frac{54a^2}{\pi^2 x^4}$ positiv, also F_x in jedem Falle ein Minimum. *)

Beispiel 12. Sollen die Werthe von x gesucht werden, welche $\frac{1}{3}x\sqrt{b^2-\pi^2x^4}$ d. h. $\frac{1}{3}\sqrt{b^2x^2-\pi^2x^6}$ zu einem Maximo oder Minimo machen, so setze man bloß $F_x = b^2x^2-\pi^2x^6$, weil, wenn dieses ein Maximum oder Minimum ist, dann $\frac{1}{3}\sqrt{F_x}$ ebenfalls ein Maximum oder Minimum seyn wird. Dann hat man aber $\partial F_x = 2b^2x-6\pi^2x^5$, also aus $\partial F_x = 0$, entweder $x = 0$ oder $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\frac{b^2}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{b}{\pi}\sqrt{\frac{1}{3}}}$. Und da $\partial^2 F_x = 2b^2-30\pi^2x^4$, für $x = 0$ positiv, für $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\frac{b^2}{\pi^2}}$ negativ ist, so ist F_x für $x = 0$ ein Minimum, für $x = \sqrt[4]{\frac{1}{3}\frac{b^2}{\pi^2}}$ dagegen ein Maximum. **)

§. 142. Zusatz.

Ist der Ausdruck F eine vermischte Funktion von x, nämlich $F_{x,y}$ oder $F_{(x)}$, in so ferne zwischen x und y noch eine Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$ gegeben ist, wodurch y selbst wieder als eine Funktion von x sich ergibt, so bleibt natürlich das Verfahren, die Werthe von x zu finden, welche $F_{(x)}$ zu einem Maximum oder Minimum machen, dasselbe; nur daß jetzt

$$1) \qquad \partial F_{(x)} = \partial F_x + \partial F_y \cdot \partial y = 0 \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{0}$$

genommen werden muß, während ∂y selbst wieder aus der

---

*) Wird der Radius x der Grundfläche eines senkrechten Kegels gesucht, dessen Inhalt = a, dessen Mantel aber ein Minimum seyn soll, so findet sich der Mantel analytisch ausgedrückt, wie solches in diesem Beispiel gegeben worden.

**) Zu dieser analytischen Aufgabe wird man aber geführt, wenn unter allen senkrechten Kegeln, welche denselben gegebenen Mantel haben, derjenige gesucht wird, welcher den größten Inhalt hat, und wenn x den Radius der Grundfläche dieses Kegels vorstellt.

Gleichung $\varphi_{x,y} = 0$, indem man sie differenziirt, gefunden wird, d. h. aus

$$2) \qquad \partial\varphi_x + \partial\varphi_y \cdot \partial y = 0.$$

Diese beiden Gleichungen (1. u. 2.) in Verbindung mit der gegebenen $\varphi_{x,y} = 0$ dienen aber zur Elimination von ∂y und zur Bestimmung von x und y; während dann

$$3) \ \partial^2 F_{(x)} = \partial^2 F_x + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} \partial y + \partial^2 F_y \cdot \partial y^2 + \partial F_y \cdot \partial^2 y,$$

nachdem ∂y und $\partial^2 y$ mittelst der Gleichung (2.) und der aus ihr durch neues Differenziiren abgeleiteten

$$4) \ \partial^2 \varphi_x + 2 \cdot \partial^{1,1} \varphi_{x,y} \cdot \partial y + \partial^2 \varphi_y \cdot \partial y^2 + \partial\varphi_y \cdot \partial^2 y = 0,$$

eliminirt sind, für diese Werthe von x und y, welche $\partial F_{(x)} = 0$ gemacht haben, entweder positiv, oder negativ wird, so daß im erstern Fall $F_{(x)}$ ein Minimum, im andern aber ein Maximum ist.

Beispiel 1. Es sey gegeben

$$1) \qquad F_{(x)} = x^2(x^2 + y^2)$$

und

$$2) \qquad \varphi_{x,y} = \tfrac{1}{3}\pi x^2 y - a = 0,$$

so hat man, für die Werthe von x, welche $\partial F_{(x)} = 0$ machen,

$$3) \qquad \partial F_{(x)} = 4x^3 + 2xy^2 + 2x^2 y \cdot \partial y = 0$$

und

$$\partial\varphi_{(x)} = \tfrac{1}{3}\pi(2xy + x^2 \partial y) = 0,$$

d. h.

$$4) \qquad 2y + x\partial y = 0.$$

Findet man hieraus $\partial y = -\frac{2y}{x}$, und substituirt man diesen Werth in (3.), so erhält man:

$$2x^2 - y^2 = 0,$$

welche Gleichung in Verbindung mit

$$\tfrac{1}{3}\pi x^2 y - a = 0$$

durch Elimination von y

$$y = x \cdot \sqrt{2}, \qquad \tfrac{1}{3}\pi x^3 \sqrt{2} = a,$$

also $x = \sqrt[3]{\frac{3a}{\pi\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\frac{3a}{2\pi}\sqrt{2}}$ und $y = \sqrt[3]{\frac{6a}{\pi}}$ liefert.

Um nun zu prüfen, ob dieser Werth von x, den gegebenen Ausdruck F_x zu einem Maximo oder Minimo mache, muß man finden

5) $\partial^2 F_{(x)} = 12x^2 + 2y^2 + 8xy \cdot \partial y + 2x^2 \cdot \partial y^2 + 2x^2 y \cdot \partial^2 y$,

während zur Bestimmung von $\partial^2 y$, seyn wird

6) $\partial^2 \varphi_{(x)} = \frac{1}{3}\pi(2y + 4x \cdot \partial y + x^2 \cdot \partial^2 y) = 0$.

Da nun aus (4.) $\partial y = -\frac{2y}{x}$ so wird aus (6.)

$$\partial^2 y = \frac{6y}{x^2},$$

und wenn man diese Werthe von ∂y und $\partial^2 y$ in (5.) substituirt, so erhält man

7) $\partial^2 F_{(x)} = 12x^2 + 6y^2$, also positiv;

weshalb $F_{(x)}$ für die gefundenen Werthe von x und y ein Minimum ist. *)

Beispiel 2. Ist gegeben

1) $F_{(x)} = \frac{1}{3}\pi x^2 y$

während y in x ausgedrückt ist durch

$$\pi \cdot x \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = b$$

oder

2) $\varphi_{x,y} = x^4 + x^2 y^2 - \frac{b^2}{\pi^2} = 0$,

so hat man für den Werth von x, welcher $\partial F_{(x)} = 0$ macht,

3) $\partial F_{(x)} = \frac{1}{3}\pi(x^2 \cdot \partial y + 2xy) = 0$,

während ∂y gegeben ist durch die Gleichung

4) $\partial \varphi_{(x)} = 4x^3 + 2xy^2 + 2x^2 y \cdot \partial y = 0$

oder $2x^2 + y^2 + xy \cdot \partial y = 0$,

woraus, wenn ∂y (aus 3. u. 4.) eliminirt wird, sogleich

$y^2 = 2x^2$ und $y = x \cdot \sqrt{2}$ folgt.

Diese Gleichung aber in Verbindung mit der gegebenen (2.) liefert

$$x = \sqrt[4]{\frac{b^2}{3\pi^2}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt[4]{\frac{4b^2}{3\pi^2}}.$$

---

*) Es ist aber diese Aufgabe keine andere als das (Beispiel 11. des §. 141.), in so ferne $\frac{1}{3}\pi x^2 y$ den körperlichen Inhalt des Kegels, $\pi\sqrt{x^2(x^2 + y^2)}$ aber den Mantel des Kegels ausdrückt, unter y die Höhe desselben verstanden.

$$\partial^2\varphi_x + 2\cdot\partial^{1,1}\varphi_{x,y}\cdot\partial y + \partial^2\varphi_y\cdot\partial y^2 + \partial\varphi_y\cdot\partial^2 y = 0,$$

wegen $\partial\varphi_y = 0$, reduzirt. Zur Bestimmung von $\partial^2 y$ muß dann genommen werden die Gleichung der 3ten Ordnung

$$\partial^3\varphi_x + 3\cdot\partial^{2,1}\varphi_{x,y}\cdot\partial y + 3\cdot\partial^{1,2}\varphi_{x,y}\cdot\partial y^2 + \partial^3\varphi_y\cdot\partial y^3$$
$$+ 3[\partial^{1,1}\varphi_{x,y} + \partial^2\varphi_y\cdot\partial y]\cdot\partial^2 y = 0,$$

welche sich jedoch, wenn wiederum $\partial y = 0$ gefunden worden seyn sollte, auf

$$\partial^3\varphi_x + 3\cdot\partial^{1,1}\varphi_{x,y}\cdot\partial^2 y = 0$$

reduzirt.

Beispiel. Soll F_x oder y, welches durch die Gleichung

1) $\varphi_{x,y} = \frac{1}{3}x^3 - axy + \frac{1}{3}y^3 = 0$

gegeben ist, ein Maximum oder Minimum werden, so hat man zunächst

2) $\partial\varphi_{(x)} = x^2 - ay + (y^2 - ax)\cdot\partial y = 0,$

woraus 3) $\partial y = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

sich ergibt. — Macht man hier nun

4) $\partial\varphi_x = ay - x^2 = 0,$

so findet sich $x^6 - 2a^3x^3 = 0$, d. h. $x = y = 0$ und $x = a\cdot\sqrt[3]{2}$, $y = a\cdot\sqrt[3]{4}$, als den Gleichungen (1. u. 4.) entsprechend.

Prüft man nun zuerst die Werthe $x = y = 0$, so findet man, daß dieselben auch $\partial\varphi_y$ d. h. $y^2 - ax$, $= 0$ machen, und $\partial y = \dfrac{ay - x^2}{y^2 - ax}$ auf die Form $\frac{0}{0}$ bringen. Weil jedoch ist

$$\partial\varphi_x = x^2 - ay, \qquad \partial\varphi_y = y^2 - ax,$$

$$\partial^2\varphi_x = 2x, \qquad \partial^{1,1}\varphi_{x,y} = -a, \qquad \partial^2\varphi_y = 2y,$$

so hat man jetzt zur Bestimmung von ∂y für $x = y =$, Gleichung

$$2x - 2a\cdot\partial y + 2y\cdot\partial y^2 = 0, \text{ *)}$$

---

*) Natürlich muß man diese Gleichung erhalten, wenn man die (2.) noch einmal differenzirt, dabei aber ∂y als konstant ansieht, weil diese Voraussetzung hier dieselben Folgen hat, wie wenn man sich bloß den Koeffizienten von ∂y in (2.), $= 0$ denkt.

welche, da sie quadratisch ist, für ∂y zwei Werthe liefert, nämlich

$$\partial y = 0 \quad \text{und} \quad \partial y = \frac{1}{0}.$$

Ferner ist $\partial^2 \varphi_x = 2$, mithin für $\partial y = 0$,

$$\partial^2 y = -\frac{\partial^2 \varphi_x}{3 \cdot \partial^{1,1} \varphi_{x,y}} = \frac{6}{9a} = \frac{2}{3a},$$

also positiv, wenn a positiv vorausgesetzt wird, so daß für $x = y = 0$ und $\partial y = 0$, die Funktion y ein Minimum wird.

Weil aber auch für $x = y = 0$, $\partial y = \frac{1}{0}$ wird, so muß man dieselben Werthe auch noch in dieser Hinsicht prüfen. Diese Untersuchung erfordert nun, daß man alle steigenden nach ganzen und gebrochenen Potenzen von x fortlaufenden Reihen finde, welche dem y_{0+h} in der zwischen x und y gegebenen Gleichung entsprechen. Man findet aber aus der gegebenen Gleichung

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0,$$

für y_{0+h} dem (§. 110.) zu Folge, 3 Reihen, nämlich

1) $y_{0+h} = \frac{1}{3a} \cdot h^2 + \cdots\cdots$ in inf.

2) $y_{0+h} = +\sqrt{3a} \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots$ in inf.

3) $y_{0+h} = -\sqrt{3a} \cdot h^{\frac{1}{2}} \cdots\cdots$ in inf.

Die erstere lehrt nach (§§. 100. u. 101.), daß $\partial y = 0$ für $x = 0$, und zeigt das oben schon gefundene Minimum an. Die beiden andern Reihen entsprechen denjenigen beiden, der durch die kubische Gleichung

$$x^3 - 3axy + y^3 = 0$$

gegebenen 3 Formen von y, welche $\partial y = \frac{1}{0}$ machen, für $x = 0$.

Nun fällt aber aus diesen Reihen für y_{0+h} in die Augen, daß diese beiden andern Formen von y weder ein Maximum noch ein Minimum an dieser Stelle haben, weil das erste Glied der nach steigenden Potenzen von h fortlaufenden Reihen, welche den Unterschied $y_{x+h} - y_x$ für $x = 0$ ausdrücken, mit $h^{\frac{1}{2}}$ affizirt ist, folglich für h negativ, imaginär wird.

Sind aber die Werthe $x = y = 0$ untersucht, so bleiben noch die Werthe

$$x = a \cdot \sqrt[3]{2}, \qquad y = a \cdot \sqrt[3]{4}$$

zu untersuchen. — Weil für sie

$$\partial y = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

wird, so findet man nach (§. 141.) für diese Werthe von x,

$$\partial^2 y = \frac{-2x}{y^2 - ax} = -\frac{2}{a}.$$

Folglich ist y für diesen Werth von x ein Maximum.

§. 144. Zusatz.

Als eine Eigenthümlichkeit der jetzigen Bestimmung des Ganges der reelen Werthe einer Funktion y oder F_x, in Bezug auf die frühern ähnlichen Bestimmungen im Iten und IIten Theile dieses Systems, müssen wir vorzüglich Folgendes hervorheben.

Dort war nämlich nur von ganzen Funktionen von x die Rede, und diese haben (auch wenn man sich solche denkt, welche unendlich viele Glieder haben) für jeden Werth von x immer nur einen einzigen Werth. Hier dagegen, wo dieselbe Untersuchung ganz allgemein geführt wird, kommen unter andern auch die mehrdeutigen irrazionalen, ja die oft unendlichvieldeutigen transzendenten Funktionen von x vor, welchen für jeden einzelnen Werth von x selbst mehre, ja unendlich viele Werthe zukommen.

Mit Recht nannte Euler die irrazionalen und überhaupt die mehrdeutigen Ausdrücke, in so ferne sie als Funktionen von x betrachtet werden, mehrförmige oder vielförmige Funktionen. Jede dieser verschiedenen Formen hat ihren eigenen Gang für die stetig wachsenden oder stetig abnehmenden Werthe von x; und für jede dieser verschiedenen (wenn auch unter sich durch eine gemeinschaftliche Gleichung zusammenhängenden) Formen muß der Gang ihrer, zu allen stetig neben einander liegenden Werthen von x, gehörigen Werthe, besonders bestimmt werden. Jede dieser besonderen Formen einer solchen mehrförmigen (irrazionalen

oder transzendenten) Funktion hat dann natürlich, in ihrem eigenen Gang ihrer Werthe, auch ihre eigenen Maxima und Minima.

Dies ist's aber, welches hier nöthig macht, daß man zu jeder Form von y auch das zugehörige ∂y und $\partial^2 y$ bestimme, wie solches namentlich im (§. 7.) für entwickelte Funktionen geschehen und in den vorhergehenden Beispielen stillschweigend benutzt worden ist.

§. 145. Aufgabe.

Es ist F eine beliebige Funktion zweier Veränderlichen x und y. Man soll den Gang ihrer Werthe angeben, unter der Voraussetzung, daß dem x und auch dem y, nach und nach alle stetig neben einander liegenden Werthe von $+\infty$ an, durch 0 hindurch, bis zu $-\infty$ hin gegeben werden, aber unabhängig von einander, so daß, während x einen dieser reelen Werthe hat, dem y noch jeder beliebige andere zu Theil werden kann.

Auflösung.

Während die dem x nächst anliegenden Werthe von x durch $x + \varkappa \cdot \delta x$ vorgestellt seyn können, mag man die dem y nächst anliegenden Werthe von y durch $y + \varkappa \cdot \delta y$ ausdrücken, indem man $\varkappa$ bald positiv, bald negativ, jedesmal aber im Moment des Verschwindens nimmt, dagegen δx und δy so beliebig und unabhängig von einander annimmt, wie solches das vorausgesetzte beliebige und von einander unabhängige Verändern von x und von y erfordert.

Die durch diese nächsten Werthe von x und y hervorgehenden Werthe von $F_{x,y}$, können dann durch $F_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y}$ ausgedrückt und nach dem Taylor'schen Lehrsatz für zwei Veränderliche (§. 29.) in eine nach Potenzen von $\varkappa$ fortlaufende Reihe verwandelt werden, so daß man hat

$$F_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y} - F_{x,y} = (\partial F_x \cdot \delta x + \partial F_y \cdot \delta y) \cdot \varkappa$$
$$+ (\partial^2 F_x \cdot \delta x^2 + 2\partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \partial^2 F_x \cdot \delta y^2) \cdot \frac{\varkappa^2}{2!} + \cdots;$$

und es kann dann dieser Unterschied nicht immerfort positiv, oder nicht immerfort negativ seyn, wenn nicht

1) $\partial F_x \cdot \delta x + \partial F_y \cdot \delta y = 0$

und 2) $\partial^2 F_x \cdot \delta x^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \partial^2 F_y \cdot \delta y^2$

immerfort positiv, oder immerfort negativ ist.

Man kann nun die Aufgabe in mehre einzelne zerfällen.

I. Denkt man sich unter $F_{x+\alpha \cdot \delta x,\, y+\alpha \cdot \delta y}$ nur die 4 Werthe vorgestellt, welche man erhält, wenn man einmal x allein, und dann y allein nur sich verändern läßt, so hat man

$\delta y = 0$, während δx beliebig

und $\delta x = 0$, während δy beliebig ist, und die Gleichung (1.) könnte nicht in beiden Fällen bestehen, wenn nicht

3) $\partial F_x = 0$, und 4) $\partial F_y = 0$ wäre.

Ist nun $\delta y = 0$, so reduzirt sich der Ausdruck (2.) bloß auf

5) $\partial^2 F_x \cdot \delta x^2$,

welcher positiv oder negativ ist, je nachdem $\partial^2 F_x$ selbst positiv oder negativ wird. — Und ist $\delta x = 0$, so reduzirt sich derselbe Ausdruck (2.) auf

6) $\partial^2 F_y \cdot \delta y^2$,

welcher mit $\partial^2 F_y$ zugleich positiv oder negativ ist, immer für die aus den Gleichungen (3. u. 4.) hervorgehenden Werthe von x und y.

Sind also $\partial^2 F_x$ und $\partial^2 F_y$ zugleich positiv oder zugleich negativ, so ist $F_{x,y}$ [für die aus (3. u. 4.) hervorgehenden Werthe von x und y] ein Minimum oder ein Maximum in Bezug auf alle diese 4 nächsten Nachbarwerthe. — Ist aber $\partial^2 F_x$ positiv, dagegen zu gleicher Zeit $\partial^2 F_y$ negativ, so ist $F_{x,y}$ ein Minimum in Bezug auf die beiden durch $F_{x+\alpha \cdot \delta x, y}$ vorgestellten nächsten Nachbarwerthe, dagegen zu gleicher Zeit ein Maximum in Bezug auf die andern beiden durch $F_{x, y+\alpha \cdot \delta y}$ vorgestellten. — Und ist $\partial^2 F_x$ negativ, zugleich aber $\partial^2 F_y$ positiv, so ist $F_{x,y}$ ein Maximum in Bezug auf die ersten beiden, dagegen zu gleicher Zeit ein Minimum in Bezug auf die andern beiden nächsten

Nachbarwerthe (wo $\varkappa$ immer positiv und negativ zugleich, aber jedesmal im Moment des Verschwindens gedacht wird).

II. Denkt man sich unter $F_{x+\varkappa\cdot\delta x,\, y+\varkappa\cdot\delta y}$ alle möglichen Werthe vorgestellt, welche dadurch erhalten werden, daß man δx und δy ganz beliebig und ganz unabhängig von einander seyn läßt, so zerlegt sich die Gleichung (1.) wiederum in

$$3)\ \partial F_x = 0, \quad \text{und} \quad 4)\ \partial F_y = 0,$$

weil sonst für zwei verschiedene Werthe von δx und einem und demselben Werth von δy, oder umgekehrt, die Gleichung (1.) nicht bestehen könnte; aber der Ausdruck (2.), nämlich

$$\partial^2 F_x \cdot \delta x^2 + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \delta x \cdot \delta y + \partial^2 F_y \cdot \delta y^2,$$

welcher auch so geschrieben werden kann

$$5)\ (\partial^2 F_x + 2\partial^{1,1} F_{x,y} \cdot p + \partial^2 F_y \cdot p^2) \cdot \delta x^2$$

wenn man $\frac{\delta y}{\delta x}$ durch p bezeichnet, muß nun für jeden Werth von δx und auch für jeden Werth von p, immerfort positiv bleiben oder immerfort negativ, für die aus (3. u. 4.) hervorgehenden Werthe von x und y, wenn $F_{x,y}$ ein Minimum oder ein Maximum seyn soll in Bezug auf alle die jetzt im Sinne habenden nächsten Nachbarwerthe.

Bezeichnet man nun durch

	A,	B,	C	das was
aus	$\partial^2 F_x$,	$\partial^{1,1} F_{x,y}$,	$\partial^2 F_y$	wird,

wenn statt x und y die aus (3. u. 4.) gefundenen Werthe gesetzt werden, so ist also $F_{x,y}$ in der jetzigen Beziehung ein Maximum oder ein Minimum, wenn der Ausdruck (6.) d. h. (weil δx^2 immer positiv ist) wenn

$$6)\ A + 2B \cdot p + C \cdot p^2$$

für jeden beliebigen reelen Werth von p immerfort positiv oder immerfort negativ wird, d. h. also nach (I. Th. dieses Systems §. 260.) *) wenn

---

*) Man hat $A + 2Bp + Cp^2 = C\left(p + \frac{B}{C}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{C}$; und

A (d. h. $\partial^2 F_x$) und C (d. h. $\partial^2 F_y$) zugleich positiv
oder A und zugleich negativ,
und in beiden Fällen auch noch

$$AC > B^2 \text{ (d. h. } \partial^2 F_x \cdot \partial^2 F_y > \partial^{1,1} F^2_{x,y})$$

wird.

III. Und sollte $F_{x+\varkappa\,\delta x,\ y+\varkappa\cdot\delta y}$ bloß diejenigen beiden nächsten Nachbarwerthe vorstellen, welche man erhält, wenn x willkührlich wächst um $\varkappa\cdot\delta x$, dagegen der Zuwachs von y nicht willkührlich, sondern δy von δx gerade so abhängig gedacht ist, daß $\delta y = m\cdot\delta x$ und m ein einziger gegebener reeler Werth ist, so wird die Gleichung (1.) jetzt in

$$7)\ \partial F_x + m\cdot\partial F_y = 0,$$

dagegen der Ausdruck (2.) in

$$8)\ (\partial^2 F_x + 2\partial^{1,1} F_{x,y}\cdot m + \partial^2 F_y \cdot m^2)\cdot\delta x^2$$

übergehen. — Die Gleichung (7.) zerfällt jetzt, da m ein einziger gegebener Werth ist, nicht mehr in obige beiden Gleichungen (3. u. 4.), sondern ist bloß eine Gleichung zwischen x und y, so daß noch eine Bedingung fehlt, wenn x und y als bestimmte Ziffernausdrücke sollen angesehen werden können.

Wird nun z. B. der Werth von x, oder der von y gegeben, so hat man vermöge der Gleichung (7.) auch den andern Werth von y oder von x, gegeben; und ist dann für diese Ziffernwerthe von x und y, der Faktor in (8.), nämlich

$$\partial^2 F_x + 2\cdot\partial^{1,1} F_{x,y}\cdot m + \partial^2 F_y\cdot m^2,$$

für diesen gegebenen Werth von m, positiv oder negativ, so ist $F_{x,y}$ in dieser jetzigen Beziehung und unter den übrigen Voraussetzungen ein Minimum im erstern Fall, ein Maximum im andern.

---

deshalb muß C und $AC - B^2$ zu gleicher Zeit positiv seyn, wenn dieser Ausdruck für jedes reele p positiv werden soll; und dann ist nothwendig auch A positiv. — Und eben so muß C negativ und $AC - B^2$ positiv seyn, wenn derselbe Ausdruck für jedes reele p immerfort negativ werden soll; und dann ist auch nothwendig A negativ.

§. 146. Zusatz.

Zu dieser letztern Voraussetzung (§. 145. III.) könnte man auch $\partial F_x = 0$ nehmen, als neue noch hinzutretende Bedingung (statt daß vorhin x oder y als gegeben angesehen wurde). Wegen dieser Bedingung würde die Gleichung (7.) auf $\partial F_y = 0$ sich zurückziehen, so daß man nun wiederum zur Bestimmung von x und y, die beiden Gleichungen

$$\partial F_x = 0, \quad \text{und} \quad \partial F_y = 0$$

hätte. Wäre dann $\partial^2 F_x$ positiv oder negativ, so wäre $F_{x,y}$ für diese Werthe von x und y zu gleicher Zeit ein Minimum oder Maximum in Bezug auf die beiden durch $F_{x+\varkappa.\delta x,y}$ vorgestellten nächsten Nachbarwerthe, so wie, weil auch $\partial F_y = 0$ ist, $\partial^2 F_y$ positiv oder negativ das Minimum oder Maximum andeuten würde in Bezug auf die beiden durch $F_{x,y+\varkappa.\delta y}$ vorgestellten nächsten Nachbarwerthe. Es könnte also dann die Funktion $F_{x,y}$, für diese Werthe von x und y ein Maximum seyn in Bezug auf alle 6 nächsten Nachbarwerthe, oder ein Minimum in Bezug auf alle 6; dagegen auch ein Maximum in Bezug auf nur 2 oder 4 derselben, und zu gleicher Zeit ein Minimum in Bezug auf die 4 oder 2 übrigen; und auch umgekehrt.

Anmerkung. Wäre zwischen x und y noch eine Gleichung gegeben $\varphi_{x,y} = 0$, so hätte man y als Funktion von x (oder x als Funktion von y) gegeben, und δx und δy wären nicht mehr von einander unabhängig, sondern nach dem Taylor'schen Satze

$$\delta y = \partial y_x \cdot \delta x + \partial^2 y_x \cdot \varkappa \cdot \frac{\delta x^2}{2!} + \partial^3 y_x \cdot \varkappa^2 \cdot \frac{\delta y^3}{3!} + \cdots$$

$$\text{oder } \delta x = \partial x_y \cdot \delta y + \partial^2 x_y \cdot \varkappa \cdot \frac{\delta y^2}{2!} + \partial^3 x_y \cdot \varkappa^2 \cdot \frac{\delta y^3}{3!} + \cdots.$$

Dann würde in der Entwicklung der Differenz $F_{x+\varkappa.\delta x,\, y+\varkappa.\delta y} - F_{x,y}$ nach Potenzen von $\varkappa$ (welche jetzt am füglichsten nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze gefunden werden könnte),

der Koeffizient von x, $= (\partial F_x + \partial F_y \cdot \partial y_x) \cdot \delta x$, der von $\frac{x^2}{2!}$ dagegen, $= (\partial^2 F_x + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \partial y_x + \partial^2 F_y \cdot \partial y_x^2 + \partial F_y \cdot \partial^2 y) \cdot \delta x^2$. seyn.

Für den Fall des Maximums oder Minimums hätte man dann $\partial F_x + \partial F_y \cdot \partial y_x = 0$, aber auch $\partial \varphi_x + \partial \varphi_y \cdot \partial y_x = 0$, aus welchen Gleichungen in Verbindung mit $\varphi_{x,y} = 0$ sich x und y als bestimmte Ziffernausdrücke ergeben.

Allein weil jetzt, wo y die durch $\varphi_{x,y} = 0$ gegebene Funktion von x vorstellt, die Funktion $F_{x,y}$ nichts anders als $F_{(x)}$ ist, so wäre dies bloß wieder der bereits (§. 142.) behandelte Fall.

§. 147. Zusatz.

Schlüßlich sind in Bezug auf die Funktionen zweier Veränderlichen, auch noch die Werthe von x und y zu prüfen, welche

$$\text{I. } \partial F_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial F_y = \frac{1}{0}$$

oder
$$\text{II. } \partial F_x = \frac{1}{0} \quad \text{und} \quad \partial F_y = 0$$

oder
$$\text{III. } \partial F_x = \frac{1}{0} \quad \text{und} \quad \partial F_y = \frac{1}{0}$$

machen, weil darunter auch solche seyn können, welche $F_{x,y}$ in Bezug auf gegebene nächste Nachbarwerthe zu einem Maximum oder Minimum machen.

Und sind $x = a$, $y = b$ solche Werthe, welche einem der 3 Paare von Gleichungen (I. II. oder III.) genügen, und nun näher zu prüfen sind, so muß man $a + k$ statt x und $b + h$ statt y in $F_{x,y}$ direkt setzen, und den Unterschied $F_{x+k, y+h} - F_{x,y}$ direkt nach k und h entwickeln, und dann aus den ersten Gliedern dieser Entwicklung beurtheilen, ob unter den noch zwischen h und k gemachten Voraussetzungen, dieser Unterschied immerfort positiv oder immerfort negativ wird.

Wir wollen die vorhergehenden (§§. 145.—147.) nur durch ein Beispiel erläutern. Ist nämlich die Zahl a in 3 Theile x, y, $a-x-y$ so zu theilen, daß

$$F_{x,y} = x^m \cdot y^n \cdot (a-x-y)^p$$

ein Maximum oder Minimum werde in Bezug auf alle durch $F_{x+k,\, y+h}$ vorgestellten nächsten Nachbarwerthe so hat man

$$\partial F_x = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} \cdot [ma - mx - my - px] = 0,$$

$$\partial F_y = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} \cdot [na - nx - ny - py] = 0.$$

Nimmt man nun hier

$$ma - mx - my - px = 0 \quad \text{und} \quad na - nx - ny - py = 0,$$

d. h. $x = \frac{ma}{m+n+p}$, $y = \frac{na}{m+n+p}$, $a-x-y = \frac{pa}{m+n+p}$;

so machen diese Werthe von x und y,

sowohl $\partial F_x = 0$, als auch $\partial F_y = 0$.

Und für diese Werthe von x und y wird nun, wenn man $m+n+p = q$ setzt,

$$\partial^2 F_x = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^n\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

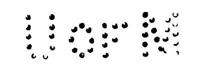
$$\partial^{1,1} F_{x,y} = -\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$\partial^2 F_y = -(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^m\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

so daß man sich bald überzeugt, daß für positive m, n, p, a, wirklich $\partial^2 F_x$ negativ und $\partial^2 F_x \cdot \partial^2 F_y > (\partial^{1,1} F_{x,y})^2$, also $F_{x,y}$ in Bezug auf die unendlich vielen nächsten Nachbarwerthe $F_{x+k,\, y+h}$ ein Maximum seyn werde, für diese Werthe von x und y.

Aber nicht bloß diese Werthe von x und y, machen $\partial F_x = 0$ und $\partial F_y = 0$, sondern auch alle die Werthe von x und y, welche einen der Faktoren in ∂F_x und einen der Faktoren in ∂F_y, $= 0$ machen. Und alle diese müssen nachgehends näher geprüft werden. Alle übrigen Werthe, welche man aber hier erhält, machen einen der 3 Theile x, y oder $a-x-y$ zu Null, so daß dann eigentlich a nur in zwei Theile getheilt ist.

Und ist endlich $m-1$, oder $n-1$, oder $p-1$ negativ, so kann man auch leicht $\partial F_x = \frac{1}{0}$ und $\partial F_y = 0$, oder $\partial F_y = \frac{1}{0}$ und $\partial F_x = 0$, oder $\partial F_x = \frac{1}{0}$ und $\partial F_y = \frac{1}{0}$ machen, und die dann



weiter berücksichtigten Aufgaben, welche theilweise die isoperimetrischen genannt worden sind, und zu deren Lösung eine eigene Rechnung nöthig zu seyn schien, welche man die Variationsrechnung (Calcul des Variations, von den kombinatorischen Variationen des II. Th. dieses Systems ganz verschieden) nannte. — Der Verf. des gegenwärtigen Systems hat aber nachgewiesen

1) daß die Variationsrechnung nichts weiter ist als die Kunst, jeden solchen gegebenen Ausdruck F_x nach Potenzen von x zu entwickeln, daß die Variationsrechnung also durch den Maclaurin'schen Lehrsatz des (§. 13.) erledigt ist:

2) daß die höhere Lehre vom Größten und Kleinsten vorzüglich die Kunst in Anspruch nimmt, die Gleichung

$$\delta F = 0$$

gehörig in die durch sie bedingten einzelnen Gleichungen zerfällen zu können, und daß daher sowohl über die Differenzial- als auch über die Integral-Rechnung noch eigene Sätze mitgetheilt werden müssen (wie ähnliche für algebraische Ausdrücke in den frühern Theilen dieses Systems bereits gegeben worden sind), welche dieses Zerfällen der Gleichungen lehren.

Hinsichtlich dieser wichtigen Lehren empfiehlt der Verf. seine Lehre vom Größten und Kleinsten, Berlin 1825., überzeugt, daß sie den hinlänglich vorbereiteten Anfänger, welcher in diesen Theil der Analysis weiter einzudringen wünscht, die ungemeine Mühe und Anstrengung erspart, welche bisher Viele von dem Studium der Variationsrechnung ganz abgeschreckt haben.

§. 149. Zusatz.

Bestimmung der Grenz-Werthe.

Die Auffindung der relativen Maxima oder Minima dient übrigens auch dazu, die absolut kleinsten oder absolut größten Werthe zu finden. Der absolut größte oder absolut kleinste Werth einer Funktion ist nämlich entweder ein Werth, wo die Funktion vom reelen zum imaginären übergeht, also ein

Grenz-Werth; oder er ist einer von den relativ größten oder kleinsten Werthen. Hat man daher alle Grenz-Werthe und alle relativ größten oder kleinsten Werthe gesucht, so findet sich nothwendig der absolut größte oder kleinste Werth darunter.

Es ist aber F_x für $x = a$ ein Grenz-Werth, wenn $(F_x)_{a+h}$ reel, $(F_x)_{a-h}$ dagegen imaginär, oder wenn $(F_x)_{a-h}$ reel, aber $(F_x)_{a+h}$ imaginär wird, unter der Voraussetzung, daß h im Moment des Verschwindens gedacht und $(F_x)_a$ noch reel ist, unter $(F_x)_a$, $(F_x)_{a+h}$, $(F_x)_{a-h}$ die Werthe verstanden, welche F_x erhält, wenn a, $a+h$, oder $a-h$ statt x gesetzt werden. Für diese Werthe von x, welche F_x zu einem Grenz-Werth machen, kann $F_{x\pm h}$ nicht nach ganzen Potenzen von h fortlaufen, weil sonst F_{x+h} und F_{x-h} alle beide zugleich reel oder alle beide zugleich imaginär wären. Man wird also die Grenz-Werthe nicht dadurch finden, daß man $\partial F_x = 0$ setzt; aber auch nicht immer dadurch, daß man $\partial F_x = \frac{1}{0}$ setzt, weil dem (§. 100.) zu Folge, F_{x+h} dergestalt nach gebrochnen Potenzen von h fortgehen kann, daß $\partial^{n+1}F_x$ die erste unter den Ableitungen ist, welche die Form $\frac{1}{0}$ annehmen, für diesen Werth a von x. Man wird aber alle Grenz-Werthe finden, wenn man $\partial F_x = \frac{1}{0}$ setzt, und nachdem dies nicht angeht, oder die daraus hervorgegangenen Werthe bereits geprüft sind, auch $\partial^2 F_x = \frac{1}{0}$ setzt, und wenn auch dies nicht angeht, oder die daraus hervorgegangenen Werthe von x bereits geprüft sind, wenn man auch $\partial^3 F_x = \frac{1}{0}$ setzt, und so weiter fort, bis man sich überzeugt hat, daß keine der folgenden höhern Ableitungen, wenn sie $= \frac{1}{0}$ gesetzt werden, neue Werthe für x liefern. Jeden dieser Werthe von x, z. B. $x = a$ prüft man nun dadurch, daß man direkt in F_x, $a+h$ statt x setzt, den Ausdruck direkt nach Potenzen von

der Koeffizient von x, $= (\partial F_x + \partial F_y \cdot \partial y_x) \cdot \delta x$, der von $\frac{x^2}{2!}$ dagegen, $= (\partial^2 F_x + 2 \cdot \partial^{1,1} F_{x,y} \cdot \partial y_x + \partial^2 F_y \cdot \partial y_x^2 + \partial F_y \cdot \partial^2 y) \cdot \delta x^2$. seyn.

Für den Fall des Maximums oder Minimums hätte man dann $\partial F_x + \partial F_y \cdot \partial y_x = 0$, aber auch $\partial \varphi_x + \partial \varphi_y \cdot \partial y_x = 0$, aus welchen Gleichungen in Verbindung mit $\varphi_{x,y} = 0$ sich x und y als bestimmte Ziffernausdrücke ergeben.

Allein weil jetzt, wo y die durch $\varphi_{x,y} = 0$ gegebene Funktion von x vorstellt, die Funktion $F_{x,y}$ nichts anders als $F_{(x)}$ ist, so wäre dies bloß wieder der bereits (§. 142.) behandelte Fall.

§. 147. Zusatz.

Schlüßlich sind in Bezug auf die Funktionen zweier Veränderlichen, auch noch die Werthe von x und y zu prüfen, welche

$$\text{I. } \partial F_x = 0 \quad \text{und} \quad \partial F_y = \frac{1}{0}$$

oder

$$\text{II. } \partial F_x = \frac{1}{0} \quad \text{und} \quad \partial F_y = 0$$

oder

$$\text{III. } \partial F_x = \frac{1}{0} \quad \text{und} \quad \partial F_y = \frac{1}{0}$$

machen, weil darunter auch solche seyn können, welche $F_{x,y}$ in Bezug auf gegebene nächste Nachbarwerthe zu einem Maximum oder Minimum machen.

Und sind $x = a$, $y = b$ solche Werthe, welche einem der 3 Paare von Gleichungen (I. II. oder III.) genügen, und nun näher zu prüfen sind, so muß man $a + k$ statt x und $b + h$ statt y in $F_{x,y}$ direkt setzen, und den Unterschied $F_{x+k,y+h} - F_{x,y}$ direkt nach k und h entwickeln, und dann aus den ersten Gliedern dieser Entwicklung beurtheilen, ob unter den noch zwischen h und k gemachten Voraussetzungen, dieser Unterschied immerfort positiv oder immerfort negativ wird.

Wir wollen die vorhergehenden (§§. 145.—147.) nur durch ein Beispiel erläutern. Ist nämlich die Zahl a in 3 Theile x, y, $a - x - y$ so zu theilen, daß

$$F_{x,y} = x^m \cdot y^n \cdot (a-x-y)^p$$

ein Maximum oder Minimum werde in Bezug auf alle durch $F_{x+k,\,y+h}$ vorgestellten nächsten Nachbarwerthe so hat man

$$\partial F_x = x^{m-1} y^n (a-x-y)^{p-1} \cdot [ma - mx - my - px] = 0,$$

$$\partial F_y = x^m y^{n-1} (a-x-y)^{p-1} \cdot [na - nx - ny - py] = 0.$$

Nimmt man nun hier

$$ma - mx - my - px = 0 \quad \text{und} \quad na - nx - ny - py = 0,$$

d. h. $x = \frac{ma}{m+n+p}$, $y = \frac{na}{m+n+p}$, $a - x - y = \frac{pa}{m+n+p}$;

so machen diese Werthe von x und y,

sowohl $\partial F_x = 0$, als auch $\partial F_y = 0$.

Und für diese Werthe von x und y wird nun, wenn man $m+n+p = q$ setzt,

$$\partial^2 F_x = -(m+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^n\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$\partial^{1,1} F_{x,y} = -\frac{mna}{q}\left(\frac{ma}{q}\right)^{m-1}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

$$\partial^2 F_y = -(n+p)\left(\frac{ma}{q}\right)^{m}\left(\frac{na}{q}\right)^{n-1}\left(\frac{pa}{q}\right)^{p-1},$$

so daß man sich bald überzeugt, daß für positive m, n, p, a, wirklich $\partial^2 F_x$ negativ und $\partial^2 F_x \cdot \partial^2 F_y > (\partial^{1,1} F_{x,y})^2$, also $F_{x,y}$ in Bezug auf die unendlich vielen nächsten Nachbarwerthe $F_{x+k,\,y+h}$ ein Maximum seyn werde, für diese Werthe von x und y.

Aber nicht bloß diese Werthe von x und y, machen $\partial F_x = 0$ und $\partial F_y = 0$, sondern auch alle die Werthe von x und y, welche einen der Faktoren in ∂F_x und einen der Faktoren in ∂F_y, $= 0$ machen. Und alle diese müssen nachgehends näher geprüft werden. Alle übrigen Werthe, welche man aber hier erhält, machen einen der 3 Theile x, y oder $a-x-y$ zu Null, so daß dann eigentlich a nur in zwei Theile getheilt ist.

Und ist endlich $m-1$, oder $n-1$, oder $p-1$ negativ, so kann man auch leicht $\partial F_x = \frac{1}{0}$ und $\partial F_y = 0$, oder $\partial F_y = \frac{1}{0}$ und $\partial F_x = 0$, oder $\partial F_x = \frac{1}{0}$ und $\partial F_y = \frac{1}{0}$ machen, und die dann

hervorgehenden Werthe von x und y prüfen, ob sie $F_{x,y}$ in dem verlangten Sinne zu einem Maximum oder Minimum machen.

§. 148. Zusatz.

Wir betrachten nicht mehr den Fall, wo Funktionen von 3 oder mehr Veränderlichen ein Maximum oder Minimum werden sollen, weil die bisher entwickelten Prinzipien für den Anfänger ausreichen werden, auch diesen Fall behandeln zu können. Wir erlauben uns daher nur noch, mit wenigen Worten auf die allgemeinsten Untersuchungen über das Größte und Kleinste hinzudeuten.

Es ist nämlich so viel wenigstens aus den vorhergegangenen Untersuchungen über die größten und kleinsten Werthe der Funktionen klar geworden, daß theoretisch immer nur die Auffindung von relativ größten und relativ kleinsten Werthen der gegebenen Funktionen F berücksichtiget wird, und daß die Aufgaben sehr verschiedene Auflösungen zulassen, je nachdem die nächsten Nachbarwerthe, in Bezug auf welche F selbst den größten oder kleinsten Werth haben soll, so oder anders angenommen sind, je nachdem also die Aufgabe selbst diese oder eine andere ist.

An diese Betrachtung hängt sich daher diese allgemeinste Aufgabe: „Es ist F eine Funktion von beliebig viel Veränderlichen, auf eine beliebige Weise (ja selbst durch bis jetzt noch gar nicht betrachtete Wege) zusammengesetzt, und F_x stelle gegebene nächste Nachbarwerthe vor, die nach ganzen oder gebrochenen Potenzen des im Moment des Verschwindens befindlichen x entwickelbar sind, so daß die für F_x existirende Reihe mit F selbst anfängt (d. h. für $x = 0$ auf F selbst sich reduzirt). Man soll die Werthe der unabhängig Veränderlichen finden, für welche diese Funktion F in Bezug auf diese gegebenen (also nicht in Bezug auf andere) nächsten Nachbarwerthe F_x ein Maximum oder Minimum wird."

Da die Funktion F in Bezug auf F_x ein Maximum oder Minimum seyn wird, wenn der Unterschied $F_x - F$, für x positiv und negativ aber jedesmal im Moment des Verschwindens ge-

dacht, immerfort negativ, oder immerfort positiv bleibt, so darf man nur diesen Unterschied nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 13.) in eine Reihe entwickeln nach Potenzen von x fortlaufend, so daß man hat

$$F_x - F = (\partial F_x)_0 \cdot x + (\partial^2 F_x)_0 \cdot \frac{x^2}{2!} + (\partial^3 F_x)_0 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdot,$$

wo die Koeffizienten von x, $\frac{x^2}{2!}$, $\frac{x^3}{3!}$, ꝛc. das sind, was aus den Ableitungen von F_x nach x wird, wenn man zuletzt 0 statt x schreibt; oder daß man hat:

$$\text{I. } F_x - F = \delta F \cdot x + \delta^2 F \cdot \frac{x^2}{2!} + \delta^3 F \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdot\cdot,$$

wenn dieselben Koeffizienten, des bequemeren Schreibens wegen, ein für allemal durch δF, $\delta^2 F$, $\delta^3 F$, ꝛc. ꝛc. bezeichnet sind.

Soll nun dieser Unterschied (I.) beständig positiv bleiben, für x positiv oder negativ, aber im Moment des Verschwindens, so muß

$$\delta F = 0 \quad \text{und} \quad \delta^2 F \quad \text{positiv}$$

seyn; während

$$\delta F = 0 \quad \text{und} \quad \delta^2 F \quad \text{negativ}$$

die Bedingungen sind, unter denen der gedachte Unterschied $F_x - F$ für ein im Moment des Verschwindens, übrigens beliebig positiv oder negativ gedachtes x, beständig negativ, also F selbst in Bezug auf F_x ein Maximum ist. *)

Anmerkung. Diese allgemeinste Aufgabe und ihre Auflösung enthält alle die früher hier gegebenen Aufgaben nebst ihren Auflösungen in sich; aber auch alle die übrigen hier nicht

---

*) Daß man auch noch die Werthe der unabhängig Veränderlichen, welche $\delta F = \frac{1}{0}$ machen, prüfen müsse, ob für sie nicht der Unterschied $F_x - F$ beständig positiv, oder beständig negativ wird, versteht sich, dem Frühern zu Folge, von selbst, und wird daher hier nicht weiter beachtet.



Höhere Zahlenlehre.

Sechstes Kapitel.

Die ersten Begriffe der Zurückleitungs-Rechnung und ihr Verhältniß zur Integral-Rechnung.

§. 150. Erklärung und Folgerung.

Unter Zurückleitung einer gegebenen Funktion φ, nach x, versteht man jede Funktion F_x, deren Ableitung nach x, diese gegebene Funktion φ ist. — Diese Zurückleitung wird durch

$$\partial^{-1}\varphi_x$$

bezeichnet, also daß aus der Gleichung

$$\partial^{-1}\varphi_x = F_x, \text{ sogleich folgt } \varphi_x = \partial F_x.$$

Die Funktion φ_x zurückleiten nach x, heißt: die Funktion F_x finden.

Dem zu Folge hat man also:

1) $\partial^{-1}(x^m)_x = \frac{1}{m+1}\cdot x^{m+1} + a$,

weil $x^m = \partial\left(\frac{1}{m+1}x^{m+1} + a\right)_x$ ist;

2) $\partial^{-1}(x^m)_m = \frac{x^m}{\log x} + b$,

weil $x^m = \partial\left(\frac{x^m}{\log x} + b\right)_m$;

3) $\partial^{-1}(ax+b)_x = \frac{1}{2}ax^2+bx+c$,

weil $ax+b = \partial(\frac{1}{2}ax^2+bx+c)_x$;

4) $\partial^{-1}\left(\frac{a}{x}\right) = a \cdot log\, bx$,

weil $\frac{a}{x} = \partial(a\, log\, bx)_x$ ist.

§. 151. Erklärung.

Unter Integral eines Differenzials $\varphi \cdot dx$, versteht man jede Funktion f_x, welche nach x differenziirt (d. h. deren Differenzial, $x+dx$ statt x setzend) das gegebene $\varphi \cdot dx$ gibt (oder ist). Solches Integral wird durch

$$\int \varphi \cdot dx$$

bezeichnet, so daß

aus $\int \varphi \cdot dx = f_x$, sogleich folgt $\varphi \cdot dx = df_x$.

Das Differenzial $\varphi \cdot dx$ integriren, heißt: das Integral f_x finden.

Diesem zu Folge hat man

$$1)\ \int x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1} \cdot x^{m+1} + a;$$

$$2)\ \int x^m \cdot dm = \frac{x^m}{log\, x} + b;$$

$$3)\ \int (ax+b) \cdot dx = \frac{1}{2}ax^2 + bx + c;$$

$$4)\ \int \frac{a}{x} \cdot dx = a \cdot log\, bx.$$

§. 152. Zusatz.

Ist aber $\varphi \cdot dx = df_x$, so ist $\varphi = \frac{df}{dx}$,

d. h. $\varphi = \partial f_x$, also $f_x = \partial^{-1}\varphi_x$.

Das Integral $\int \varphi \cdot dx$ ist daher allemal auch die Zurückleitung $\partial^{-1}\varphi_x$; und daher sind vollkommen identisch

die Zurückleitung $\partial^{-1}\varphi_x$ und das Integral $\int \varphi \cdot dx$.

Die Integral-Rechnung und die Zurückleitungs-Rechnung sind daher nur in der Form der Zeichen, dem Wesen nach aber durchaus gar nicht, von einander verschieden. Und es ist allemal

$$1)\ \partial(\partial^{-1}\varphi_x)_x = \varphi$$

oder

$$2)\ d(\int\varphi\cdot dx) = \varphi.$$

Anmerkung 1. Die umgekehrten Formeln

$$\partial^{-1}(\partial\varphi_x)_x = \varphi$$

oder

$$\int\frac{d\varphi}{dx}\cdot dx = \varphi$$

(gewöhnlich $\int d\varphi = \varphi$ geschrieben), sind nur mit Einschränkung wahr, wie die nächste Anmerkung 2. näher nachweiset.

Anmerkung 2. Bereits aus (§. 150. N. 1. — 4.) erhellet, daß jede gegebene Funktion φ unendlich viele von einander verschiedene Zurückleitungen hat. Aber allgemeiner weiß man, daß wenn C ein beliebiger von x unabhängiger Ausdruck ist, dann

$$\psi_x \quad \text{und} \quad \psi_x + C$$

eine und dieselbe Ableitung $\partial\psi_x = \varphi$ haben; daß also zu einer gegebenen Funktion φ nicht bloß die Zurückleitung ψ_x sondern auch diese andere Zurückleitung $\psi_x + C$ gehört. Ist daher $F_x = \partial^{-1}\varphi_x$, so kann F_x dieses ψ_x, aber auch $\psi_x + C$ seyn, während für C selbst wiederum jeder beliebige Ausdruck, also auch jede aber von x unabhängige (nach x konstante), Funktion gesetzt werden kann. Es ist daher

$$\partial^{-1}\varphi_x \quad \text{oder das mit ihr identische} \quad \int\varphi\cdot dx$$

ein unendlich vieldeutiges Zeichen, welches unendlich viele von einander verschiedene Funktionen von x vorstellt, die jedoch alle die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß wenn F_x eine beliebige derselben vorstellt,

dann $\partial F_x = \varphi_x$ oder $dF_x = \varphi_x\cdot dx$ ist.

Diese Betrachtung veranlaßt eine eigene Untersuchung und diese letztere führt zu folgendem Resultat.

§. 153. Lehrsatz.

Jede Zurückleitung $\partial^{-1}\varphi_x$ (oder das Integral $\int\varphi\cdot dx$) ist ein unendlich vieldeutiges Zeichen, repräsentirt unendlich viele von einander verschiedene (einander nicht gleiche) Funktionen von x; aber die Differenz je zweier dieser Funktionen ist allemal ein von x unabhängiger Ausdruck (nach x konstant).

Beweis. Sind ψ_x und f_x zwei beliebige der Funktionen von x, welche die Eigenschaft mit einander gemein haben, daß für jeden Werth von x,

$$\partial\psi_x = \partial f_x = \varphi_x$$

oder $d\psi_x = df_x = \varphi_x \cdot dx$ ist,

so ist $\partial\psi_x - \partial f_x = 0$ oder $d\psi_x - df_x = 0$,

d. h. $\partial(\psi_x - f_x)_x = 0$ oder $d(\psi_x - f_x) = 0$,

für jeden Werth von x, folglich $\psi_x - f_x$ nach x konstant.

Wäre nämlich, wenn $\partial\pi_x = 0$ ist für jeden Werth von x, π_x doch noch von x abhängig, so wäre π_{x+h} von π_x selbst noch verschieden, wenigstens so lange h allgemein gedacht wird, und dann wäre also die Reihe

$$\partial\pi_x \cdot h + \partial^2\pi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3\pi_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

welche diesen Unterschied $\pi_{x+h} - \pi_x$, dem Taylor'schen Satze gemäß ausdrückt, nicht 0, während doch aus $\partial\pi_x = 0$ für jeden Werth von x, auch

$$\partial^2\pi_x = 0, \quad \partial^3\pi_x = 0, \quad \partial^4\pi_x = 0, \text{ etc. etc. etc.},$$

also dieser Unterschied selbst $= 0$ hervorgeht.

§. 154. Zusatz.

Diesem Lehrsatze zu Folge enthält also, wenn ψ_x irgend eine der Funktionen von x ist, welche durch $\partial^{-1}\varphi_x$ oder $\int\varphi\cdot dx$ vorgestellt sind, dann der Ausdruck

$$\psi_x + C,$$

(wo C noch jeden beliebigen von x unabhängigen (nach x konstanten) Ausdruck vorstellt, der selber wieder eine beliebige Funktion von beliebig vielen und beliebigen andern Veränderlichen

seyn kann) alle möglichen der

durch $\partial^{-1}\varphi_x$ oder $\int\varphi \cdot dx$

vorgestellten Funktionen von x.

Und ist f_x eine andere der durch $\partial^{-1}\varphi_x$ oder $\int\varphi \cdot dx$ vorgestellten Funktionen von x, so drückt

$$f_x + c$$

abermals alle möglichen, der durch $\partial^{-1}\varphi_x$ oder $\int\varphi \cdot dx$ vorgestellten Funktionen von x aus, wenn nur c ganz beliebig, aber von x unabhängig (nach x konstant) gedacht wird. *)

§. 155. Erklärung.

Man unterscheidet daher „besonderes oder partikuläres Integral" (besondere oder partikuläre Zurückleitung von φ_x nach x) von $\varphi_x \cdot dx$ und versteht darunter jede Funktion ψ_x oder f_x, welche der Bedingung

$$\partial\psi_x = \varphi_x \quad \text{d. h.} \quad d\psi_x = \varphi_x \cdot dx,$$

oder $$\partial f_x = \varphi_x \quad \text{d. h.} \quad df_x = \varphi_x \cdot dx$$

genügt, ohne jedoch einen gänzlich willkührlichen, in φ_x noch nicht vorkommenden, Buchstaben in sich aufgenommen zu haben, während dann

$$\psi_x + C \qquad \text{oder} \qquad f_x + c$$

das allgemeine Integral (die allgemeine Zurückleitung) heißt; sobald C (oder c) in φ_x selbst noch nicht vorkommt, aber ganz unbestimmt ist und noch jeden möglichen nach x konstanten Ausdruck repräsentirt.

---

*) Ist z. B. $\psi_x - f_x = a$, unter a einen nach x konstanten Ausdruck gedacht, so ist

$$\psi_x + C = f_x + (a + C) = f_x + c$$

wenn unter c die Summe $a + C$ verstanden wird. Der Ausdruck $\psi_x + C$ enthält nun anschaulich dieselben Funktionen in sich, die auch in $f_x + c$ stecken.

§. 156. Zusatz.

1) Das allgemeine Integral enthält alle besondern Integrale in sich, nach den verschiedenen Werthen der Konstante C.

2) Ist ψ_x ein besonderes Integral, so ist $\psi_x + C$ das allgemeine, sobald C die willkührliche Konstante (nach x) ist.

3) Ist f_x ein anderes besonderes Integral, so ist $f_x + c$ (oder $f_x + C$) abermals das allgemeine Integral, daher mit $\psi_x + C$ vollkommen identisch, wenn auch nicht $\psi_x = f_x$ seyn sollte. *)

4) Ein Differenzial $\varphi \cdot dx$ integriren, oder eine Funktion φ nach x zurückleiten, heißt also den (§§. 150. u. 151.) zu Folge, nicht sowohl, ein besonderes Integral (eine besondere Zurückleitung) finden, als vielmehr allemal, des allgemeine Integral (die allgemeine Zurückleitung) angeben.

Weil aber das allgemeine Integral aus jedem einzelnen besondern Intregale ψ_x oder f_x, oder ꝛc., erhalten wird, wenn man noch eine ganz beliebige (nach x) Konstante C (welcher Buchstabe C in φ_x noch nicht vorkommen darf) addirt, so kommt das praktische Integriren allerdings gewöhnlich darauf zurück, von allen besondern Integralen eines und desselben gegebenen Differenzials, irgend eines zu finden.

5) Wenn daher zwei verschiedene Integrations-Wege (Zurückleitungs-Wege) als Integral von $\varphi \cdot dx$ (als Zurückleitung von φ_x nach x) zwei Resultate ψ_x und f_x geben, so werden diese gar nicht einander gleich, wohl aber um einen, von x unabhängigen (nach x konstanten) Ausdruck von einander verschieden seyn müssen. Jeder aber gibt alle möglichen Integrale $\psi_x + C$ oder $f_x + C$, sobald die willkührliche (in φ noch nicht vorkommende,

---

*) Ist aber $\psi_x = f_x + a$, so muß man in $\psi_x + C$, dem C einen um a kleinern Werth gegeben sich denken als dem C in $f_x + C$, wenn aus

$$\psi_x + C \qquad \text{und} \qquad f_x + C$$

jedesmal ein und dasselbe neue besondere Integral hervorgehen soll.

nach x) Konstante C noch addirt wird, welches C jedoch jedesmal noch alle möglichen, nach x konstanten Ausdrücke, also auch alle möglichen Funktionen von beliebig vielen und beliebigen Veränderlichen, mit Ausnahme des x, repräsentirt.

6) Die Bestimmung der besondern Werthe der allgemeinen Konstante) ist durchaus kein Gegenstand der Integral- (oder Zurückleitungs-) Rechnung, sondern kann höchstens in ihren Anwendungen verlangt werden, wo eine gesuchte Größe ein besonderes Integral ist. von $\varphi \cdot dx$, welches unter allen möglichen Integralen

$$\psi_x + C \qquad \text{oder} \qquad f_x + C,$$

welche die Integral-Rechnung zu finden hat, den übrigen gegebenen Bedingungen gemäß, noch herausgesucht werden muß.

Beispiele. Unter den Nummern (I.—4. des §. 150. oder 151.) ist das Integral für (N. 1.) nämlich $\frac{1}{m+1} \cdot x^{m+1} + a$ ein allgemeines wenn a noch alles bedeutet, ein besonderes dagegen, wenn a Null ist, oder sonst einen bestimmten Ziffernwerth vorstellt. Dasselbe gilt von (N. 2. u. N. 4.) in Bezug auf b; nur daß in (Nr. 4.) b nicht 0 werden kann, weil sonst eine im Kalkul unzuläßige Form erscheinen würde, welche überall und unter allen Umständen vermieden werden muß. Und das in (N. 3.) gefundene Integral $\frac{1}{2}ax^2 + bx + c$ ist ein allgemeines, wenn c noch ganz allgemein ist, dagegen ein besonderes, wenn c = 0 oder wenn c irgend einen andern bestimmten Ziffernwerth vorstellt.

Setzt man endlich in dem Integral $a \cdot log\, bx$, welches in (N. 4.) gefunden worden ist, zuerst b = 1, dann b = —2, so erhält man

$$a \cdot log\, x \qquad \text{und} \qquad a \cdot log(-2x)$$

als zwei von einander verschiedene Integrale von $\frac{a}{x} \cdot dx$ (oder als zwei verschiedene Zurückleitungen von $\frac{a}{x}$ nach x). Und

$$\text{I. } a \cdot log\, x + C, \qquad \text{so gut wie} \qquad \text{II. } a \cdot log(-2x) + C$$

ist dann allemal das allgemeine Integral, wenn C allgemein gedacht ist, dabei aber

$$\text{I. } a \cdot log\, x + C \text{ vollkommen identisch mit II. } a \cdot log(-2x) + C.$$

Und gibt man dem C in (I.) den Werth $a \cdot log\, b$, und dem C in (II.) den Werth $a \cdot log(-\frac{1}{2}b)$, so erhält man einmal

$$a \cdot log\, x + a \cdot log\, b \qquad \text{d. h.} \quad a \cdot log\, bx$$

und dann

$$a \cdot log(-2x) + a \cdot log(-\tfrac{1}{2}b) \quad \text{d. h.} \quad a \cdot log\, bx;$$

d. h. beide Formen (I. u. II.) liefern nun eine und dieselbe dritte Form, welche ein und dasselbe besondere Integral ist, wenn $b = 1$, oder wenn b irgend einen andern Ziffernwerth vorstellt, welche aber eine und dieselbe Form des allgemeinen Integrals ist, wenn b selbst noch ganz allgemein gedacht seyn sollte.

§. 157. Erklärung und Folgerung.

Unter den Anwendungen kommen diejenigen am häufigsten vor, in denen unter allen Integralen von $\varphi \cdot dx$ (unter allen Zurückleitungen von φ_x nach x), dasjenige gerade verlangt wird, dessen Werth genau Null ist, für einen gegebenen Werth a von x. In diesem Falle sagt man „dasjenige Integral von $\varphi \cdot dx$ werde verlangt, welches mit $x = a$ anfängt" oder „das Integral (die Zurückleitung) fange mit $x = a$ an."

Und ist ψ_x irgend eines der besonderen Integrale von $\varphi \cdot dx$ (irgend eine der besondern Zurückleitungen von φ_x nach x), so ist

$$\psi_x - (\psi_x)_a$$

(unter $(\psi_x)_a$ das verstanden, was aus ψ_x wird, so oft man a statt x setzt) dasjenige besondere Integral, welches das mit $x = a$ anfangende genannt wurde. — Und ist f_x ein anderes der besonderen Integrale, so ist

$$f_x - (f_x)_a$$

abermals das mit $x = a$ anfangende, so daß genau

$$\psi_x - (\psi_x)_a = f_x - (f_x)_a$$

seyn muß.

Denn das mit $x = a$ anfangende Integral ist das in $\psi_x + C$ enthaltene, wenn statt C derjenige Werth gesetzt wird, welcher den Werth des Integrals $\psi_x + C$ für $x = a$, d. h. $(\psi_x)_a + C$, $= 0$ macht; also ist $C = -(\psi_x)_a$; und dieses besondere Integral ist

$= \psi_x + C$ für diesen Werth von C, also $= \psi_x - (\psi_x)_a$. Aus demselben Grunde ist es auch $= f_x - (f_x)_a$.

Weil aber, wenn f_x von ψ_x verschieden ist, dieser Unterschied $\psi_x - f_x$ nur von x unabhängig, etwa $= b$ seyn kann, so ist noch

$$\psi_x = f_x + b,$$

und für $x = a$

$$(\psi_x)_a = (f_x)_a + b;$$

folglich ist auch, wenn man diese Gleichungen von einander subtrahirt

$$\psi_x - (\psi_x)_a = f_x - (f_x)_a.$$

Das mit $x = a$ anfangende (besondere) Integral bezeichne man durch

$$\int_{x \div a} \varphi \cdot dx \qquad \text{oder durch} \qquad (\partial^{-1} \varphi_x)_{x \div a}.$$

Und überhaupt verstehe man unter $(\pi_x)_{x \div a}$ die Differenz $\pi_x - (\pi_x)_a$, so daß, wenn ψ_x irgend ein besonderes Integral von $\varphi \cdot dx$ ist, dann das mit $x = a$ anfangende auch durch

$$(\psi_x)_{x \div a}, \qquad \text{so gut wie durch} \qquad \psi_x - (\psi_x)_a$$

vorgestellt seyn wird.

So findet sich aus (1.—4. des §. 150. oder 151.):

1) $$\int_{x \div b} x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1}(x^{m+1} - b^{m+1}),$$

$$\text{oder } \left[\partial^{-1}(x^m)_x\right]_{x \div b} = \frac{1}{m+1}(x^{m+1} - b^{m+1});$$

2) $$\int_{m \div 1} x^m \cdot dm = \frac{x^m}{\log x} - \frac{x^1}{\log x} = \frac{x^m - x}{\log x},$$

$$\text{oder } \left[\partial^{-1}(x^m)_m\right]_{m \div 1} = \frac{x^m - x}{\log x};$$

3) $$\int_{x \div 0} (ax + b) \cdot dx = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx,$$

$$\text{oder } \left[\partial^{-1}(ax + b)_x\right]_{x \div 0} = \tfrac{1}{2}ax^2 + bx;$$

4) $$\int_{x \div 1} \frac{a}{x} \cdot dx = a \cdot \log bx - a \cdot \log b = a \cdot \log x,$$

$$\text{oder } \left[\partial^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)_x\right]_{x \div 1} = a \cdot \log x.$$

§. 158. Erklärung und Folgerung.

Jedes besondere, und also auch das mit $x = a$ anfangende Integral von $\varphi \cdot dx$, ist eine Funktion von x, erhält also nach und nach immer andere und andere Werthe, nach den verschiedenen Werthen von x. Will man nun den Werth dieses mit $x = a$ anfangenden Integrals, für den Werth $x = b$ haben, so sagt man „das Integral solle mit $x = b$ aufhören" oder „das Integral sey zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen" oder „das Integral erstrecke sich von $x = a$ bis zu $x = b$.

Und ist ψ_x irgend eines der besondern Integrale von $\varphi \cdot dx$, so ist

$$\psi_x - (\psi_x)_a$$

das mit $x = a$ anfangende besondere Integral, und natürlich dann

$$(\psi_x)_b - (\psi_x)_a$$

„das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene;" oder „das mit $x = a$ anfangende und mit $x = b$ aufhörende" Integral.

Das mit $x = a$ anfangende und mit $x = b$ aufhörende, d. h. das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral von $\varphi \cdot dx$, bezeichne man durch

$$\int_{b \div a} \varphi \cdot dx \qquad \text{oder} \qquad (\partial^{-1} \varphi_x)_{b \div a},$$

oder wenn ψ_x irgend ein besonderes Integral von $\varphi \cdot dx$ ist, durch

$$(\psi_x)_{b \div a}. \; *)$$

---

*) Fourier hat zuerst vorgeschlagen, wo hier $\int_{x \div a} \varphi \cdot dx$ geschrieben wird, $\int_a^x \varphi \cdot dx$ zu setzen, und wo hier $\int_{\beta \div a} \varphi \cdot dx$ geschrieben steht, $\int_a^\beta \varphi \cdot dx$ zu schreiben. — Die hier gebrauchte Bezeichnungsweise gewährt aber eine größere Bequemlichkeit in zusammengesetztern Untersuchungen, weshalb sie (die von dem Verf. bereits in seiner „Lehre vom Größten und Kleinsten, Berlin 1825, gebraucht worden ist) auch hier beibehalten und empfohlen wird.

Und überhaupt bezeichne man, wenn π_x eine beliebige Funktion von x ist, die Differenz $(\pi_x)_b - (\pi_x)_a$ durch $(\pi_x)_{b \div a}$ und sage „die Funktion π_x sey zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommen." *)

Beispiele. So folgt aus den (NN. der §§. 150. u. 151.)

1) $\int_{b \div a} x^m \cdot dx = \frac{1}{m+1} \cdot (b^{m+1} - a^{m+1})$,

oder $\left[\partial^{-1}(x^m)_x\right]_{b \div a} = \frac{1}{m+1} \cdot (b^{m+1} - a^{m+1}$.

2) $\int_{b \div a} x^m \cdot dm = \frac{x^b - x^a}{\log x}$,

oder $\left[\partial^{-1}(x^m)_m\right]_{b \div a} = \frac{x^b - x^a}{\log x}$

3) $\int_{3 \div 2} (ax + b) \cdot dx = \frac{5}{2}a + b$,

oder $\left[\partial^{-1}(ax + b)_x\right]_{3 \div 2} = \frac{5}{2}a + b$.

4) $\int_{-2 \div (-1)} \frac{a}{x} \cdot dx = a \cdot \log(-2) - a \cdot \log(-1) = a \cdot \log(+2)$,

oder $\left[\partial^{-1}\left(\frac{a}{x}\right)_x\right]_{-2 \div (-1)} = a \cdot \log(+2)$.

§. 159. Zusatz.

Wenn das allgemeine, und jedes besondere Integral von $\varphi \cdot dx$, und daher auch das mit $x = a$ anfangende, immer noch eine Funktion von x ist (welche auf's neue nach x abgeleitet oder zurückgeleitet werden kann), so gilt dies doch nicht mehr von dem mit $x = b$ aufhörenden Integral, welches der Werth der eben gedachten Funktion von x ist, wenn für x der bestimmte Werth b gesetzt wird.

---

*) Man möge aber hier gar nicht übersehen, daß das Wort Integral und das entsprechende Zeichen $\int \varphi \cdot dx$, dem (§. 152.) zu Folge, ganz genau und vollkommen synonym und identisch ist mit dem Worte Zurückleitung und dem entsprechenden Zeichen $\partial^{-1}\varphi_x$.

Das zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ genommene Integral (das mit $x = a$ anfangende und mit $x = b$ aufhörende) heißt deshalb auch ein **bestimmtes** Integral (Intégral définie), weil solches das unbestimmte x gar nicht mehr enthält. Ein solches kann natürlich auch nicht mehr als Funktion von x angesehen werden.

Jedes noch nicht bestimmte Integral, d. h. jedes Integral von $\varphi \cdot dx$, welches noch x als einen unbestimmten Veränderlichen enthält; also jedes besondere, und auch das allgemeine Integral, wird dann noch ein **unbestimmtes** Integral genannt.

Anmerkung. Ist ψ_x ein besonderes Integral von $\varphi \cdot dx$, so lassen sich offenbar die Gleichungen

$$(\psi)_b - (\psi)_a = -[(\psi)_a - (\psi)_b]$$

$$(\psi)_c - (\psi)_a = [(\psi)_c - (\psi)_b] + [(\psi)_b - (\psi)_a]$$

u. dgl., welche nach den ersten Elementen der Buchstabenrechnung richtig sind, in den hier mitgetheilten Zeichen so schreiben:

$$\int_{b \div a} \varphi \cdot dx = -\int_{a \div b} \varphi \cdot dx,$$

$$\int_{c \div a} \varphi \cdot dx = \int_{c \div b} \varphi \cdot dx + \int_{b \div a} \varphi \cdot dx,$$

u. s. f.; so daß es nicht nöthig scheint, dieser Kleinigkeit einen eigenen Paragraphen zu widmen.

§. 160. Aufgabe.

Das Integral von $\varphi \cdot dx$ (oder die Zurückleitung von φ_x nach x) welches mit $x = a$ anfängt, zu finden.

Auflösung.

Ist ψ_x irgend ein besonderes Integral von $\varphi \cdot dx$, so hat man

$$\partial \psi_x = \varphi_x, \quad \partial^2 \psi_x = \partial \varphi_x, \; \cdots\cdots \; \partial^n \psi_x = \partial^{n-1} \varphi_x.$$

Und nach dem verallgemeinerten Maclaurin'schen Lehrsatze (§. 14.):

$$\psi_x - (\psi_x)_a = (\partial \psi_x)_a \cdot (x-a) + (\partial^2 \psi_x)_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots\cdots$$

d. h.

$$\text{I. } \int_{x\dashv a} \varphi \cdot dx = (\varphi_x)_a \cdot (x-a) + (\partial\varphi_x)_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + (\partial^2\varphi_x)_a \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots,$$

welches das gesuchte Integral ist, in Form einer unendlichen, nach Potenzen von $(x-a)$ fortlaufenden Reihe.

§. 161. Zusatz.

Setzt man in dieser Formel statt x und statt a zwei Werthe $\alpha+h$ und α, oder $\alpha+2h$ und $\alpha+h$, oder $\alpha+3h$ und $\alpha+2h$, u. s. f., zuletzt $\alpha+nh$ und $\alpha+(n-1)h$, so daß der Unterschied $x-a$ allemal $= h$ wird, so ist, je kleiner h ist, desto näher, in so ferne man die höhern Potenzen von h außer Acht läßt:

$$(\psi_x)_{\alpha+h} - (\psi_x)_\alpha = (\varphi_x)_\alpha \cdot h,$$

$$(\psi_x)_{\alpha+2h} - (\psi_x)_{\alpha+h} = (\varphi_x)_{\alpha+h} \cdot h,$$

$$(\psi_x)_{\alpha+3h} - (\psi_x)_{\alpha+2h} = (\varphi_x)_{\alpha+2h} \cdot h,$$

u. s. f., zuletzt

$$(\psi_x)_{\alpha+nh} - (\psi_x)_{\alpha+(n-1)h} = (\varphi_x)_{\alpha+(n-1)h} \cdot h.$$

Addirt man nun diese Gleichungen, so erhält man, je kleiner h ist, desto näher

$$1)\ (\psi_x)_{\alpha+nh} - (\psi_x)_\alpha = h \cdot [(\varphi_x)_\alpha + (\varphi_x)_{\alpha+h} + (\varphi_x)_{\alpha+2h} + \cdots + (\varphi_x)_{\alpha+(n-1)h}].$$

Setzt man aber hier $\alpha+nh = \beta$, also $h = \frac{\beta-\alpha}{n}$, so erhält man für den Fall, daß b ein beliebiger aber gegebener Werth ist, je größer man die ganze Zahl n nimmt, desto näher

$$2)\ (\psi_x)_\beta - (\psi_x)_\alpha \text{ oder } \int_{\beta\dashv\alpha} \varphi_x \cdot dx = [(\varphi_x)_\alpha + (\varphi_x)_{\alpha+h} + (\varphi_x)_{\alpha+2h} + \cdots\cdots + (\varphi_x)_{\beta-h}] \cdot h,$$

wenn statt h der Quozient $\frac{\beta-\alpha}{n}$ gesetzt wird; welche Formel zur Näherungsberechnung der zwischen den Grenzen $x=\alpha$ und

$x = \beta$ liegenden bestimmten Integrale, von einem beliebig gegebenen Differenzial $\varphi_x \cdot dx$, gebraucht werden kann, aber nur mit großer Vorsicht angewandt werden darf.

Anmerkung 1. Da nämlich alle mit h^2 und mit den höhern Potenzen von h multiplizirten Glieder weggelassen worden sind, so muß man sich vorher überzeugen

1) daß die Koeffizienten dieser weggelassenen Glieder, nämlich $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$, $\partial^3\varphi_x$, rc. rc., für alle zwischen α und β liegenden Werthe von x, nicht unendlich groß werden. [Und wenn einige darunter für einen oder den andern dieser Werthe von x eine im Kalkul unzuläßige Form $\left(\frac{1}{0}\right.$ oder $\log 0$ oder dgl.) annehmen sollten, so daß für diesen Werth von x eine nach gebrochenen Potenzen von h fortlaufende Reihe existirte, so müßte man sich desselben auch von den Koeffizienten dieser Reihe versichern].

2) Auch φ_x selbst darf für keinen zwischen α und β liegenden Werth von x, ein solche unzuläßige Form annehmen oder unendlich groß werden.

3) In jedem Falle der Anwendung müßte man die Grenze bestimmen, welche der Fehler nicht übersteigen kann, um nach dieser Grenze einerseits die Größe der jedesmal willkührlich groß zu nehmenden ganzen Zahl n abnehmen, andrerseits überhaupt die Zuläßigkeit dieses Näherungsweges beurtheilen zu können.

Davon aber in spätern Theilen dieses Systems.

Anmerkung 2. Betrachtet man den Ausdruck zur Rechten in (§. 161. N. 2.) genauer, so findet man, daß er erhalten wird, wenn man in dem gegebenen Differenzial $\varphi \cdot dx$, statt x nach und nach alle zwischen α und β liegenden Werthe setzt, die um $\frac{\beta-\alpha}{n}$ von einander verschieden sind, statt dx aber diesen Unterschied oder Zuwachs der Werthe $\frac{\beta-\alpha}{n}$, und zuletzt alle diese Werthe addirt (oder summirt). —

Diese Ansicht erklärt aber die ursprüngliche Annahme des Summenzeichens $\int$, um das Integral von $\varphi \cdot dx$ damit zu bezeichnen, weil in der That die Summe aller dieser Werthe von $\varphi \cdot dx$, das zwischen α und β genommene Integral desto genauer gibt, je kleiner man den Unterschied oder den Zuwachs dx, oder $\frac{\beta - \alpha}{n}$, der auf einander folgenden, nach und nach statt x zu setzenden Werthe nimmt.

§. 161. b. Zusatz.

Ja es drängt sich hier aus (§. 161.) mit unwiderstehlicher Gewißheit der, für die Bequemlichkeit bei vielen Anwendungen höchst wichtige Satz auf,

„daß das zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ ge„nommene Integral $[(\partial^{-1}\varphi_x)_{\beta \div \alpha}$ oder $\int_{\beta \div \alpha} \varphi \cdot dx]$ alle„mal angesehen werden kann, als die Summe von „unendlich vielen Gliedern, die alle durch $\varphi_x \cdot dx$ „repräsentirt sind, wenn in diesem $\varphi_x \cdot dx$, der Faktor dx „als konstant und im Moment des Verschwindens (un„endlich klein) gedacht wird, zu gleicher Zeit aber in „φ_x nach und nach alle die unendlich vielen zwischen „α und β stetig neben einander liegenden Werthe von „x gesetzt gedacht werden.

Man findet also die Summe von allen unendlich vielen, unendlich kleinen Produkten, die alle durch $\varphi_x \cdot dx$ repräsentirt sind, und sich über die ganze von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ liegende Strecke ausdehnen, wenn man φ_x nach x zurückleitet (d. h. $\int \varphi \cdot dx$ findet), und solche Zurückleitung (d. h. solches Integral) zwischen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \beta$ nimmt, d. h. mit $x = \alpha$ anfangen und mit $x = \beta$ aufhören läßt. Ist daher ψ_x eines der besondern Integrale von $\varphi_x \cdot dx$, so drückt $(\psi_x)_{\beta \div \alpha}$ oder $(\psi_x)_\beta - (\psi_x)_\alpha$ allemal diese Summe genau und vollkommen aus. *)

*) Ist z. B. $x = AP$ die Abscisse, $y = PM$ die zugehörige Or-

§. 162. Zusatz.

1) Denkt man sich im (§. 161.) h im Moment des Verschwindens, so sind in dem Resultat (§. 161. N. 2.) alle die mit höhern Potenzen von h multiplizirten und dort weggelassenen Glieder, gegen das erstere dort zur Rechten stehende Glied, ebenfalls im Moment des Verschwindens, also der Ausdruck zur Linken, nämlich:

$$\int_{\beta \div \alpha} \varphi \cdot dx$$

nothwendig positiv oder negativ, je nachdem das zur Rechten stehende, mit h multiplizirte, erste Glied der ganzen und wahren Entwicklungsreihe für dieses Integral, positiv oder negativ ist.

2) Ist daher $\beta > \alpha$, mithin h positiv, so ist

$$\int_{\beta \div \alpha} \varphi \cdot dx$$

---

dinate einer Kurve (Fig. 12.), und PQ $= dx$ im Moment des Verschwindens, so ist $y \cdot dx$ der Inhalt des Rechtecks PQMO, und der Inhalt der Fläche BDPM ist desto genauer die Summe aller dieser zwischen BD und PM liegenden Rechtecke, je kleiner dx ist, also ganz genau, wenn dx im Moment des Verschwindens gedacht ist. Nach dem obigen Satze findet sich aber die Summe aller dieser durch $y_x \cdot dx$ ausgedrückten, von $x = AB = \alpha$ bis $x = AP = \beta$ liegenden Rechtecke

$$= \int_{\beta \div \alpha} y_x \cdot dx;$$

und dies ist also die Fläche BDPM.

Ein andermal wird die Summe aller Kräfte gesucht, welche eine Linie BW, von $x = AB = \alpha$ an, bis $x = AW = \beta$ senkrecht drücken, wenn jeder Punkt P, dessen Abcisse AP $= x$ ist, mit der Kraft φ_x gedrückt wird. Dann ist, je kleiner die Strecke dx genommen wird, desto näher die Kraft φ_x in allen Punkten der Strecke dx ein und dieselbe; folglich die Summe aller dieser Kräfte, die in der Strecke dx wirken, $= \varphi_x \cdot dx$; also die Summe aller dieser Summen $\varphi_x \cdot dx$, wie sie auf allen solchen Strecken dx, von $x = \alpha$ an bis $x = \beta$ gefunden werden, $= \int_{\beta \div \alpha} \varphi_x \cdot dx$.

Diese Andeutungen sollen jedoch hier nur für den einen oder den andern Leser als Erläuterungen stehen.

ganz gewiß positiv, wenn φ_x für keinen der zwischen α und β liegenden Werthe von x negativ wird; dagegen ist dasselbe Integral $\int_{\beta \div \alpha} \varphi \cdot dx$ gewiß negativ, wenn φ_x für keinen der zwischen α und β liegenden Werthe von x positiv wird.

3) Ist aber $\beta < \alpha$, mithin h negativ, so ist $\int_{\beta \div \alpha} \varphi \cdot dx$ ganz gewiß $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$, wenn φ_x für keinen der zwischen α und β liegenden Werthe von x $\left\{ \begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix} \right\}$ wird.

Anmerkung. Den für viele Anwendungen so höchst wichtigen Satz (2.) mag man sich besonders einprägen. — Wichtiger noch erscheint jedoch die Formel (§. 161. N. 2.) selbst, für ein im Moment des Verschwindens gedachtes h, oder der Satz (§. 162. N. 1.), weil aus ihm dieser Satz (§. 162. N. 2.) augenblicklich hervorgeht, in ihm dagegen noch so vieles andere zu Tage liegt, was gelegentlich nicht ohne Nutzen bleibt.

Daß in der Anwendung der Sätze (2. u. 3.), unter allen zwischen α und β liegenden Werthen von x, keiner φ_x unendlich machen darf, versteht sich von selbst, da bei dem Unendlichen nicht mehr vom Positiven oder Negativen die Rede seyn kann.

§. 163. Zusatz.

Kommen wir wieder zu dem Resultat des (§. 160.) zurück. Addirt man zu jener unendlichen Reihe in (I.) zur Rechten noch die willkührliche Konstante C, so hat man das allgemeine Integral, welchen Werth man auch statt a setzen mag; also daß man hat

$$\text{II.} \int \varphi \cdot dx = C + (\varphi_x)_a \cdot (x-a) + (\partial \varphi_x)_a \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + (\partial^2 \varphi_x)_a \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots.$$

Und will man hieraus das Integral finden, welches mit $x \doteq \alpha$ anfängt, so hat man nur

$$C = -(\varphi_x)_a \cdot (\alpha - a) - (\partial\varphi_x)_a \cdot \frac{(\alpha - a)^2}{2!} - (\partial^2\varphi_x)_a \cdot \frac{(\alpha - a)^3}{3!} - \cdots\cdot$$

zu nehmen, so daß wird:

$$\text{III.}\ \int_{x \div \alpha} \varphi \cdot dx = (\varphi_x)_a \cdot \frac{(x - a) - (\alpha - a)}{1} + (\partial\varphi_x)_a \cdot \frac{(x - a)^2 - (\alpha - a)^2}{2!} + (\partial^2\varphi_x)_a \cdot \frac{(x - a)^3 - (\alpha - a)^3}{3!} + \cdots\cdot,$$

wo man statt a jede mögliche Zahl setzen kann.

Beispiel 1. Ist z. B. $\int_{x \div 0} log\, x \cdot dx$ zu finden, so setze man

$$\varphi_x = log\, x,\quad \partial\varphi_x = \frac{1}{x},\quad \partial^2\varphi_x = -\frac{1}{x^2},\quad \partial^3\varphi_x = +2 \cdot \frac{1}{x^3},\ \text{etc. etc.}$$

und $\alpha = 0$, und man erhält

$$\int_{x \div 0} log\, x \cdot dx = log\, a \cdot \frac{x}{1} + \frac{1}{a} \cdot \frac{(x - a)^2 - a^2}{2!} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(x - a)^3 + a^3}{3!} + 2 \cdot \frac{1}{a^3} \cdot \frac{(x - a)^4 - a^4}{4!} + \cdots\cdot,$$

wo für die Anwendungen, statt a jeder beliebige Ziffernwerth, also für jeden einzelnen gegebenen Werth von x, auch derjenige Werth gesetzt werden kann, welcher die unendliche Reihe selbst möglichst schnell konvergent macht, oder welcher überhaupt noch einem gegebenen Zwecke genügt. *)

Beispiel 2. Ist zu finden $\int_{x \div \alpha} \frac{1}{log\, x} \cdot dx$, so hat man

$$\varphi_x = \frac{1}{log\, x},\quad \partial\varphi_x = -\frac{1}{x \cdot (log\, x)^2},\quad \partial^2\varphi_x = +\frac{2 + log\, x}{x^2 \cdot (log\, x)^3},$$

$$\partial^3\varphi_x = -\frac{6 + 6\, log\, x + 2(log\, x)^2}{x^3 \cdot (log\, x)^4}\ \text{etc. etc.}$$

---

*) Es wird wiederholt auf die Wichtigkeit des Umstandes aufmerksam gemacht, den man in der Analysis so häufig benutzt, daß ein unbestimmter willkührlicher Buchstabe (wie hier a) eingeführt wird, um nachgehends im Speziellen denselben so annehmen zu können, daß ein zweiter Zweck noch nebenbei erreicht wird; — in der Regel größere Einfachheit der Rechnung.

Setzt man hier nun a statt x, so hat man die Koeffizienten der unendlichen Reihe, welche man in (III.) zu setzen hat, um das verlangte Integral zu haben.

Anmerkung. Die praktische Anwendung solcher unendlichen Reihen erfordert aber: 1) die Ueberzeugung, daß solche konvergent seien, und auch noch 2) daß sie schnell konvergiren. Die hiezu nöthigen Betrachtungen werden aber erst in einem der folgenden Theile dieses Systems angestellt.

§. 164. Zusatz.

Man kann aber auch die Lösung der Aufgabe des (§. 160.) noch anders aus dem Taylor'schen Lehrsatze herholen.

Ist nämlich ψ_x ein besonderes Integral von $\varphi \cdot dx$, so hat man nach diesem Satze:

$$1)\ \psi_{x+h} = \psi_x + \partial\psi_x \cdot h + \partial^2\psi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3\psi_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

also, wenn man hier $-x$ statt h setzt,

$$2)\ (\psi_x)_0 = \psi_x - \partial\psi_x \cdot x + \partial^2\psi_x \cdot \frac{x^2}{2!} - \partial^3\psi_x \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

oder, weil $\partial\psi_x = \varphi_x$, $\partial^2\psi_x = \partial\varphi_x$, $\partial^3\psi_x = \partial^2\varphi_x$, etc. etc.,

$$\text{IV. } \psi_x - (\psi_x)_0 \text{ d. h. } \int_{x \div 0} \varphi \cdot dx$$

$$= \varphi_x \cdot x - \partial\varphi_x \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{x^3}{3!} - \cdots,$$

welches das mit $x = 0$ anfangende Integral von $\varphi \cdot dx$ ist.

Und addirt man dazu noch die willkührliche Konstante C, so hat man

$$\text{V. } \int \varphi \cdot dx = C + \varphi_x \cdot x - \partial\varphi_x \cdot \frac{x^2}{2!} + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{x^3}{3!} - \cdots$$

als das allgemeine Integral; welches wieder das mit $x = \alpha$ anfangende liefert, wenn

$$C = -(\varphi_x)_\alpha \cdot \alpha + (\partial\varphi_x)_\alpha \cdot \frac{\alpha^2}{2!} - (\partial^2\varphi_x)_\alpha \cdot \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots$$

genommen wird.

Man konnte aber auch in der Taylor'schen Gleichung (I.) $-(x-a)$ statt h setzen, und man erhielt:

$$3)\ (\psi)_a = \psi_x - \partial\psi_x \cdot (x-a) + \partial^2\psi_x \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} - \partial^3\psi_x \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

oder

$$\text{VI. } \psi_x - (\psi)_a \text{ d. h. } \int_{x \div a} \varphi \cdot dx$$

$$= \varphi_x \cdot (x-a) - \partial\varphi_x \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} - \cdots,$$

welches das mit $x = a$ anfangende Integral ist, und das allgemeine Integral gibt, wenn die willkührliche Konstante C noch addirt wird, also daß man hat

$$\text{VII. } \int \varphi \cdot dx = C + \varphi_x \cdot (x-a) - \partial\varphi_x \cdot \frac{(x-a)^2}{2!} + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{(x-a)^3}{3!} - \cdots.$$

Und dieses allgemeine Integral gibt dann wieder das mit $x = \alpha$ anfangende, wenn man

$$C = -(\varphi_x)_\alpha \cdot (\alpha - a) + (\partial\varphi_x)_\alpha \cdot \frac{(\alpha-a)^2}{2!} - (\partial^2\varphi_x)_\alpha \cdot \frac{(\alpha-a)^3}{3!} + \cdots$$

nimmt, während statt a jeder beliebige Ziffernwerth genommen werden kann.

Anmerkung. Es heißt aber gewöhnlich die Gleichung (IV. u. V.) die Bernoulli'sche Reihe, während man die (VI. und VII.) die verallgemeinerte Bernoulli'sche Reihe nennen kann.

Schluß-Anmerkung.

Obgleich aber durch die in den (§§. 160. 163. u. 164.) gegebenen Auflösungen, das Integral eines jeden beliebigen Differenzials gefunden ist, so haben doch alle diese Resultate die Form von unendlichen

Reihen, welche in den meisten Anwendungen unbequem ist, also in der Regel nicht die gewünschte.

Es bleibt uns daher zunächst noch die Aufgabe: das Integral eines jeden Differenzials $\varphi \cdot dx$, wo möglich in endlicher Form zu finden.

Um aber diese Aufgabe wiederum systematisch und für alle Funktionen zu lösen, müßte man genau den Gang nehmen, welcher für das systematische Ableiten oder Differenziiren gewählt werden mußte; nämlich zeigen, wie das Integral der Summen, der Differenzen der Produkte, der Quozienten, der Potenzen und Wurzeln und der Logarithmen, in die Integrale der einzelnen Glieder, der Faktoren, des Dividenden und des Divisors, des Dignanden und Exponenten und des Logarithmanden ausgedrückt werden; — weil die letztgenannten Bestandtheile wiederum Summen oder Differenzen, Produkte oder Quozienten, Potenzen und Wurzeln oder Logarithmen seyn, und deshalb ihre Integrale dann auf's neue nach denselben Gesetzen in die ihrer noch einfachern Bestandtheile ausgedrückt werden können, u. s. w. f.; bis man zuletzt zu den Integralen der einfachsten Funktionen gelangt, welche aus den Formeln der Ableitungen (der Differenzialien) größtentheils schon bekannt sind, und sehr leicht, als Formeln der Integral-Rechnung, in ihrer neuen Form hingestellt werden können.

In der Ableitungsrechnung wurde dieser Weg noch allgemeiner aufgefaßt.

Statt nämlich die speziellen Zusammensetzungen, welche Summen, Differenzen, Produkte, Quozienten, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen genannt werden, einzeln zu betrachten, hat man dort sogleich eine beliebige Zusammensetzung $f_{x,y}$ betrachtet, aus den Bestandtheilen x und y, welche letztere dann selber wieder Funktionen von v seyn sollten. Die einzige allgemeine Formel, welche man hier erhielt, nämlich

$$\partial f_{(v)} = \partial f_x \cdot \partial x + \partial f_y \cdot \partial y,$$

enthielt dann alle die besondern

$$\partial(x \pm y) = \partial x \pm \partial y,$$

$$\partial(x \cdot y) = x \cdot \partial y + y \cdot \partial x,$$

$$\partial\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y \cdot \partial x - x \cdot \partial y}{y^2},$$

u. s. w. f. in sich. — Man könnte nun auch in der Integral-Rechnung eine solche allgemeine Formel herzustellen trachten, weil selbige alle speziellen und praktisch-brauchbaren in sich schließen, und sonach für jede gegebene Funktion $\varphi \cdot dx$ das Integral liefern würde.

So wie aber das Addiren sehr leicht, das Subtrahiren dagegen schon nicht immer möglich ist, so wie das Multipliziren allemal, das Dividiren nicht unbedingt möglich ist, so wie das Potenziren keinen Anstand hat, das Radiziren und Logarithmiren dagegen oft zu bloßen Formen führt, d. h. unausführbar ist; mit einem Worte, so wie jede indirekte Operation ihre Schwierigkeiten, ja ihre Unmöglichkeiten hat, so bewährt sich diese Ansicht auch in der Integral-Rechnung, als das Umgekehrte des Differenziirens (d. h. in der Zurückleitungsrechnung als das Umgekehrte der Ableitungsrechnung).

Es lassen sich nämlich für Summen und Differenzen ganz brauchbare Integrations-Formeln hinstellen; für Produkte und Quozienten nur halb brauchbare, für Potenzen, Wurzeln und Logarithmen so viel wie gar nichts.

Was sich aber in guter Ordnung thun läßt, mag zunächst das folgende Kapitel besonders nachweisen.

Höhere Zahlenlehre.

Siebentes Kapitel.

Gesetze des Zurückleitens oder Integrirens. Integrazions-Methoden für entwickelt gegebene Funktionen.

Erste Abtheilung.

Allgemeine Grundsätze des Zurückleitens oder Integrirens.

§. 165. Hauptlehrsatz.

Es ist allemal

$$(\odot) \dots \quad \partial^{-1}\varphi_x = \partial^{-1}(\varphi \cdot \partial x_v)_v$$

d. h. es ist einerlei, ob man eine Funktion φ nach x zurückleitet, oder ob man in dieser Funktion φ, den Veränderlichen x noch als eine Funktion von v ansieht, dieselbe Funktion φ, mit der Ableitung ∂x_v multiplizirt, und dann von dem ganzen Produkt $\varphi \cdot \partial x_v$, nach allem v die Zurückleitung nimmt.

Beweis. Es ist dieses der Satz (§. 34. I.) in das Gewand der Zurückleitungsrechnung gehüllt. Ist nämlich ψ_x eine der besondern Zurückleitungen von φ_x nach x, — ist demnach

$$\partial \psi_x = \varphi_x$$

so ist nach (§. 34. I.), wenn $\psi_{(v)}$ dieselbe Funktion ψ_x vorstellt, nur statt x überall eine Funktion von v gedacht, auch

$$\partial\psi_{(v)} = \partial\psi_x \cdot \partial x_v = \varphi_x \cdot dx_v,$$

mithin $\psi_{(x)}$ eine der besondern Zurückleitungen von $\varphi \cdot \partial x_v$ nach allem v.

Versteht man also unter $\partial^{-1}\varphi_x$ und unter $\partial^{-1}(\varphi \cdot \partial x_v)_v$, wie gewöhnlich die allgemeinen (unendlich vieldeutigen) Zurückleitungen, so sind offenbar beide Zeichen vollkommen identisch, weil jedes alle unendlich vielen Funktionen vorstellt, deren Ableitungen nach x, die Funktion φ_x, deren Ableitungen nach v aber das Produkt $\varphi \cdot \partial x_v$ geben.

§. 166. Zusatz.

Wollte man denselben Lehrsatz in der Form der Integral-Rechnung geben, so würde er zunächst so aussehen

$$1) \quad \int \varphi \cdot dx = \int (\varphi \cdot \partial x_v) \cdot dv.$$

Weil aber nach (§§. 18. u. 19.) $\partial x_v \cdot dv = dx_v$ oder $\partial x_v = \frac{dx}{dv}$ ist, so wird die Gleichung (1.) auch in

$$2) \quad \int \varphi \cdot dx = \int \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$$

übergehen.

Anmerkung. In der gewöhnlichen Integral-Rechnung wird dieser wichtige Hauptlehrsatz vorausgesetzt. Wir aber möchten dringend rathen, ihn künftighin in der Form (1. oder 2.) hinzustellen, auch da, wo von Zurückleitungen gar nicht die Rede ist, sondern wo bloß die gewöhnliche Differenzial- und Integral-Rechnung betrachtet wird.

§. 167. Aufgabe.

Wenn das Integral von $\varphi \cdot dx$ mit $x = a$ anfängt, dann statt x die Funktion von v nämlich x_v gesetzt wird, — wie wird der Werth α von v gefunden werden, damit das mit $v = \alpha$ anfangende Integral aus $(\varphi \cdot \partial x_v) \cdot dv$ genau dem mit $x = a$ anfangenden Integral von $\varphi \cdot dx$ gleich werde, d. h. damit wiederum vollkommen identisch sey

$$(\partial^{-1}\varphi_x)_{x \div a} = [\partial^{-1}(\varphi \cdot \partial x_v)_v]_{v \div \alpha}$$

oder

$$\int_{x \dashv a} \varphi \cdot dx = \int_{v \dashv \alpha} \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv.$$

Auflösung.

Ist ψ_x irgend eines der besondern Integrale von $\varphi \cdot dx$, so ist, wenn $\psi_{(v)}$ dasselbe bedeutet, unter x die Funktion x_v gedacht, $\psi_{(v)}$ offenbar eines der besondern Integrale von $\left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$, nach (§§. 165. u. 166.); und die Gleichung, welche erfüllt werden soll, ist nun

$$\psi_x - (\psi_x)_a = \psi_{(v)} - (\psi_{(v)})_\alpha.$$

Weil aber $\psi_x = \psi_{(v)}$ seyn muß, so hat man $(\psi_x)_a = (\psi_{(v)})_\alpha$ zu machen.

Da nun x_v die dem x gleiche Funktion von v vorstellt, und $\psi_{(v)}$ aus ψ_x dadurch hervorgeht, daß man x_v statt x setzt, so geht offenbar auch $(\psi_{(v)})_\alpha$ aus $(\psi_x)_a$ dadurch hervor, daß man in letzterem $(x_v)_\alpha$ statt a setzt.

Also setze man in der zwischen x und v gegebenen Gleichung $x = x_v$ (wo links bloß x allein, rechts aber gar nicht x, sondern bloß die durch x_v bezeichnete Funktion von v vorkommt, welche Gleichung zwischen x und v aber auch jede andere Form annehmen oder bereits angenommen haben kann), a statt x, und α statt v, und man hat die Gleichung zwischen a und α, aus welcher a gefunden werden kann, wenn α gegeben ist, aus welcher aber auch α gefunden wird, wenn a gegeben seyn sollte.

Beispiel. Es sey $\varphi = x^3$, und $x = v^2$, so ist $\partial x_v = 2v$ d. h. $\frac{dx}{dv} = 2v$ und $\varphi \cdot \partial x_v = 2(v^2)^3 \cdot v = 2v^7$. — Und nach (§§. 150. u. 151. N. 1.):

$$\int x^3 \cdot dx = \tfrac{1}{4}x^4 + C,$$

$$\int 2v^7 \cdot dv = \tfrac{1}{4}v^8 + C,$$

also auch

$$1) \int_{x \div a} x^3 \cdot dx = \tfrac{1}{4}(x^4 - a^4),$$

$$2) \int_{v \div \alpha} 2v^7 \cdot dv = \tfrac{1}{4}(v^8 - \alpha^8).$$

Und damit nun diese beiden speziellen Integrale identisch seien, muß man zwischen a und α dieselbe Gleichung nehmen, wie sie zwischen x und v statt fand, nämlich weil $x = v^2$, auch $a = \alpha^2$ oder $\alpha = \sqrt{a}$, — Und in der That ist dann $\alpha^8 = a^4$, so wie schon $v^8 = x^4$ ist, und es ist dann identisch

$$\tfrac{1}{4}(x^4 - a^4) = \tfrac{1}{4}(v^8 - \alpha^8).$$

§. 168. Zusatz.

Sollte das Integral aus $\varphi \cdot dx$ nicht bloß mit $x = a$ anfangen, sondern auch mit $x = b$ aufhören, und das Integral aus $\left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$ nicht bloß mit $v = \alpha$ anfangen, sondern auch mit $v = \beta$ aufhören, und sollte noch identisch seyn

$$\int_{b \div a} \varphi \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv,$$

so müßte man auch zwischen b und β dieselbe Gleichung zulassen, wie sie zwischen a und α bereits zugelassen worden ist, nämlich dieselbe, wie sie zwischen x und v angenommen oder gegeben war.

Anmerkung. Jedoch muß noch nebenbei bemerkt werden, daß $\int_{b \div a} \varphi \cdot dx$ ein Ausdruck ist, in welchem nicht mehr x, sondern nur noch b und a vorkommen, während $\int_{\beta \div \alpha} \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$ nicht mehr v, sondern bloß β und α enthält. Wird nun der erstere durch $f_{a,b}$, der andere durch $\pi_{\alpha,\beta}$ vorgestellt, so geht die Gleichung

$$1) \int_{b \div a} \varphi \cdot dx = \int_{\beta \div \alpha} \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$$

in $\quad 2) \quad f_{a,b} = \pi_{\alpha,\beta} \quad$ über.

In dieser Gestalt kann man nun während z. B. a und b beliebige aber gegebene Werthe sind, α noch ganz beliebig und namentlich von a ganz unabhängig annehmen, und dann die

Gleichung (2.) zwischen a, b, α und β, nach β auflösen und so den Grenz-Werth β dazu finden, welcher der Gleichung (2.), d. h. der Gleichung (1.) genügt.

Soll aber, wie in (§. 167.) verlangt worden war,

$$\int_{x \div a} \varphi \cdot dx = \int_{v \div \alpha} \left(\varphi \cdot \frac{dx}{dv}\right) \cdot dv$$

werden, für jeden Werth von x und den dazu gehörigen Werth von v, so ist α von a nothwendig abhängig, und zwar so, wie es (§. 167.) selbst gelehrt hat.

§. 169. Lehrsätze.

Es ist allemal

I. $\partial^{-1}(A\varphi_x)_x = A \cdot \partial^{-1}\varphi_x$

oder $\int A\varphi_x \cdot dx = A\int \varphi \cdot dx$;

d. h. der nach x konstante Faktor A bleibt unverändert (wird herausgesetzt) und bloß der veränderliche Faktor wird integrirt.

Ferner ist

II. $\partial^{-1}(\varphi_x \pm f_x)_x = \partial^{-1}\varphi_x \pm \partial^{-1}f_x$

oder $\int(\varphi \pm f) \cdot dx = \int \varphi \cdot dx \pm \int f \cdot dx$;

d. h. eine algebraische Summe wird integrirt, wenn man jedes einzelne Glied integrirt.

Und allgemeiner

III. $\int(A \cdot \varphi_x + B \cdot f_x + C \cdot \pi_x + \cdots\cdots) \cdot dx$

$$= A\int \varphi \cdot dx + B\int f \cdot dx + C\int \pi \cdot dx + \cdots\cdots.$$

Beweis. Es sind dies keine andern Sätze als die umgekehrten der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung, wie solche (§§. 9. u. 10.) zu finden sind. — Differenzirt man nämlich die Ausdrücke zur Rechten der (=) Zeichen, so kommen die Ausdrücke unter den Integralzeichen zur Linken heraus. Werden also die Integrale als allgemein angesehen, so sind dieselben links und rechts vollkommen identisch.

§. 170. Zusatz.

Es gelten aber dieselben Gleichungen (I. — III. des §. 169.) noch, wenn man alle Integrale zur Linken und zur Rechten mit einem und demselben Werth $x = a$ anfangen läßt.

§. 171. Lehrsatz.

Statt des Satzes, welcher lehren soll, wie man ein Produkt oder einen Quozienten zweier Funktionen integrirt, bekommt man diesen andern unter der Voraussetzung, daß φ, f, Funktionen von x sind, nämlich:

$$\text{IV.}\quad \partial^{-1}(\varphi\cdot f)_x = \varphi\cdot\partial^{-1}f_x - \partial^{-1}(\partial\varphi_x\cdot\partial^{-1}f_x)_x$$

d. h. $$\int(\varphi\cdot f)\cdot dx = \varphi\cdot\int f\cdot dx - \int\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\int f\cdot dx\right)\cdot dx,$$

wenn $\partial^{-1}f_x$ oder $\int f_x\cdot dx$, so oft es vorkommt, jedesmal ein und dasselbe besondere Integral vorstellt. Oder es ist, wenn man $f_x = \partial\psi_x$, d. h. $f_x\cdot dx = d\psi_x = d\psi$ setzt, d. h. wenn ψ_x ein solches besonderes Integral von $f\cdot dx$ ist,

$$\text{V.}\quad \partial^{-1}(\varphi\cdot\partial\psi_x)_x = \varphi\cdot\psi - \partial^{-1}(\psi\cdot\partial\varphi_x)_x$$

d. h. $$\int(\varphi\cdot\partial\psi_x)\cdot dx = \varphi\cdot\psi - \int(\psi\cdot\partial\varphi_x)\cdot dx$$

oder $$\int\left(\varphi\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)\cdot dx = \varphi\cdot\psi - \int\left(\psi\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot dx,$$

welche letztere Gleichung jedoch gewöhnlich so geschrieben wird

$$\int\varphi\cdot d\psi = \varphi\cdot\psi - \int\psi\cdot d\varphi,$$

während diese Art zu schreiben offenbar erlaubt ist, nach (§. 166.)

Beweis. Es ist dies der Satz (§. 36. N. 2.)

$$\partial(\varphi\psi) = \varphi\cdot\partial\psi + \psi\cdot\partial\varphi,$$

in der Form

$$\varphi\cdot\partial\psi = \partial(\varphi\cdot\psi) - \psi\cdot\partial\varphi,$$

links und rechts die Integrale nehmend, und in so ferne dann wahr, als man die Integrale in (V.), und in (IV.) mit Ausnahme des $\int f_x\cdot dx$, welches ein und dasselbe besondere Integral seyn muß,

als allgemeine sich denkt, weil dann links und rechts alle besonderen Integrale verstanden sind, folglich vollkommene Identität vorhanden ist.

§. 172. Zusatz.

Läßt man aber die Integrale mit $x = a$ anfangen, so geht die (IV.) über in

$$\text{VI.} \int_{x+a} (\varphi \cdot f) \cdot dx$$
$$= \left[\varphi_x \cdot \int f \cdot dx\right]_{x+a} - \int_{x+a} \left(\frac{d\varphi}{dx} \cdot \int f \cdot dx\right) \cdot dx,$$

wo zur Rechten unter $\int f \cdot dx$, so oft solches vorkommt, jedesmal ein und dasselbe besondere Integral verstanden werden muß, entweder ebenfalls das mit $x = a$ anfangende, oder irgend ein anderes. — und die Formel (V.) geht dann über in

$$\text{VII.} \int_{x+a} \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) \cdot dx = (\varphi_x \cdot \psi_x)_{x+a} - \int_{x+a} \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx.$$

Denn man setze ψ_x statt $\int f_x \cdot dx$, so hat man aus (§. 171. V.)

$$1) \quad \int \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) \cdot dx = \varphi_x \cdot \psi_x - \int \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx + C,$$

wenn $\int \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) \cdot dx$ und $\int \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx$ beliebige aber bestimmte ihrer besondern Integrale vorstellen, und wo C ein völlig bestimmter (nach x) konstanter Werth ist. — Setzt man nun hier a statt x, so erhält man

$$2) \quad \left[\int \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) \cdot dx\right]_a$$
$$= (\varphi_x \cdot \psi_x)_a - \left[\int \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx\right]_a + C.$$

Und zieht man die Gleichung (2.) von der (1.) ab, so ergibt sich unmittelbar die Gleichung (VII.), aus welcher jedoch die Gleichung (VI.) sogleich hervorgeht, wenn man $\int f \cdot dx$ statt ψ, also $f \cdot dx$ statt $d\psi$ substituirt; wo man natürlich nachher in (VI.) unter $\int f dx$, so oft es vorkommt, allemal ein und dasselbe besondere Integral ψ denken muß, wenn auch jedes beliebige.

Anmerkung. Wollte man statt der (VII.) bloß schreiben

$$\int_{x \div a} \varphi \cdot d\psi = (\varphi_x \cdot \psi_x)_{x \div a} - \int_{x \div a} \psi \cdot d\varphi,$$

so wäre dies nur in so ferne richtig, als man $\int \varphi \cdot d\psi$ und $\int \psi \cdot d\varphi$ als Funktionen von x gedacht, zwischen $x = a$ und $x = x$ nehmen wollte, welches jedoch bei der angenommenen Bezeichnungsweise, nicht recht aus dem Zeichen selbst erhellet, so daß eben deshalb diese letztere Art zu schreiben nicht so ganz befriedigend genannt werden kann.

§. 173. Zusatz.

Wollte man in (VI.) statt $\int f_x \cdot dx$ ebenfalls das mit $x = a$ anfangende setzen, und solches auf einen Augenblick durch F_x bezeichnen, so wäre

$$(\varphi_x \cdot F_x)_{x \div a} = \varphi_x \cdot F_x - (\varphi_x)_a \cdot (F_x)_a = \varphi_x \cdot F_x,$$

weil nach der Voraussetzung $(F_x)_a = 0$ ist; d. h.

$$(\varphi_x \cdot \int_{x \div a} f_x \cdot dx)_{x \div a} = \varphi_x \cdot \int_{x \div a} f_x \cdot dx;$$

und die Formel (VI.) nimmt dann noch folgende Gestalt an

$$\text{VIII.} \int_{x \div a} (\varphi_x \cdot f_x) \cdot dx$$
$$= \varphi_x \cdot \int_{x \div a} f_x \cdot dx - \int_{x \div a} \left(\frac{d\varphi}{dx} \cdot \int_{x \div a} f_x \cdot dx\right) \cdot dx.$$

Beispiel. Ist $\varphi_x = x^7$, $f_x = x^3$, so ist nach (§. 151. N. 1.) $\int f_x \cdot dx = \frac{1}{4}x^4 = \psi_x$, wenn man nur irgend ein besonderes Integral haben will; dagegen

$$\int_{x \div a} f_x dx = \tfrac{1}{4}(x^4 - a^4).$$

Die Formel (VI. oder VII.) gibt nun

$$1) \int_{x \div a} (x^7 \cdot x^3) \cdot dx = (\tfrac{1}{4}x^7 \cdot x^4)_{x \div a} - \int_{x \div a} \tfrac{7}{4}x^6 \cdot x^4 \cdot dx,$$

während die (VIII.) gibt

$$2) \int_{x \div a} (x^7 \cdot x^4) \cdot dx = \tfrac{1}{4}x^7 \cdot (x^4 - a^4) - \int_{x \div a} \tfrac{7}{4}x^6 (x^4 - a^4) \cdot dx.$$

Daß beide Resultate (in 1. u in 2.) zusammenfallen, kann man für dieses Beispiel noch besonders nachweisen. Es ist nämlich

3) $\int_{x \div a} \frac{7}{4} x^6 \cdot x^4 \cdot dx = \frac{7}{4} \int_{x \div a} x^{10} \cdot dx = \frac{7}{44}(x^{11} - a^{11})$;

dagegen

$$\int_{x \div a} \frac{7}{4} x^6 (x^4 - a^4) \cdot dx = \frac{7}{4} \int_{x \div a} x^{10} \cdot dx - \frac{7}{4} a^4 \int_{x \div a} x^6 \cdot dx$$
$$= \frac{7}{44}(x^{11} - a^{11}) - \frac{1}{4} a^4 (x^7 - a^7).$$

Also wird der Ausdruck zur Rechten in (1.):

$$\frac{1}{4}(x^{11} - a^{11}) - \frac{7}{44}(x^{11} - a^{11}) \text{ d. h. } \frac{1}{11}(x^{11} - a^{11}).$$

Und der Ausdruck zur Rechten in (2.) wird

$$\frac{1}{4} x^7 \cdot (x^4 - a^4) - \frac{7}{44}(x^{11} - a^{11}) + \frac{1}{4} a^4 \cdot (x^7 - a^7),$$

welches ebenfalls $\frac{1}{11}(x^{11} - a^{11})$ liefert.

Anmerkung. Wenn aber auch die Formeln (IV. — VIII.) nicht eigentlich lehren, wie man ein Produkt $\varphi_x \cdot f_x$ integrirt, so lehren sie doch, wie man das Integral eines Produkts $\varphi_x \cdot f_x$ (und also auch eines Quozienten $\frac{\varphi_x}{\pi_x}$, wenn man $\frac{1}{\pi_x} = f_x$ setzt) auf ein anderes Integral zurückführt, welches letztere vielleicht einfacher und daher zu integriren ist.

1) Gesetzt man hätte zu finden das Integral von $x \cdot a^x \cdot dx$, so setze man $\varphi_x = x$, $f_x = a^x$, also nach (§. 151.) $\int f \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a} = \psi_x$, und man hat aus der Formel (IV.)

$$\int x \cdot a^x \cdot dx = \frac{x \cdot a^x}{log\, a} - \int \frac{a^x}{log\, a} \cdot dx;$$

d. h. weil $\int \frac{a^x}{log\, a} \cdot dx = \frac{1}{log\, a} \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{(log\, a)^2}$ ist,

$$\int x \cdot a^x \cdot dx = \frac{x \cdot a^x}{log\, a} - \frac{a^x}{(log\, a)^2} = \frac{a^x}{log\, a}\left(x - \frac{1}{log\, a}\right).$$

Und will man aus diesem besondern Integral jenes andere besondere haben, welches mit $x = 0$ anfängt, so erhält man

$$\int_{x \div 0} x \cdot a^x \cdot dx = \frac{a^x}{log\, a}\left(x - \frac{1}{log\, a}\right) - \frac{a^0}{log\, a}\left(0 - \frac{1}{log\, a}\right)$$
$$= \frac{1}{log\, a}\left(x \cdot a^x - \frac{a^x - 1}{log\, a}\right).$$

2) Soll das Integral von $log x \cdot dx$ gefunden werden, so kann man $\varphi = log x$ und $f_x = 1$, also $\int f \cdot dx = \int 1 \cdot dx = x = \psi_x$ nehmen, und man hat, weil $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d(log x)}{dx} = \frac{1}{x}$ ist, noch (IV.):

$$\int log x \cdot dx = x \cdot log x - \int 1 \cdot dx = x \cdot log x - x.$$

Und will man aus diesem besondern Integral dasjenige haben, welches mit $x = 1$ anfängt, so findet sich

$$\int_{x \div 1} log x \cdot dx = x \cdot log x - x + 1.$$

So oft man aber zum Integriren eine der Formeln (IV.—VIII.) anwendet, so pflegt man dies dadurch anzudeuten, daß man sagt, „man integrire theilweise" (par parties); obgleich diese Redensart auch allgemeiner genommen werden könnte, und zuweilen in der That genommen wird.

§. 174. Zusatz.

Wollte man im (§. 171.) das Integral aus $(\varphi_x \cdot f_x) \cdot dx$ nicht bloß mit $x = a$ anfangen, sondern auch mit $x = b$ aufhören lassen, so erhielte man

$$\text{IX.} \int_{b \div a} (\varphi_x \cdot f_x) \cdot dx$$
$$= \left(\varphi_x \cdot \int f_x \cdot dx\right)_{b \div a} - \int_{b \div a} \left(\frac{d\varphi}{dx} \cdot \int f_x \cdot dx\right) \cdot dx,$$

wo statt $\int f_x \cdot dx$ jedes beliebige der besondern Integrale gesetzt werden kann, aber immer noch ein unbestimmtes d. h. ein solches, welches noch das unbestimmte x enthält, gesetzt werden muß (also nicht etwa ebenfalls das zwischen den Grenzen $x = a$ $x = b$ genommen, aber wohl z. B. das mit $x = a$ anfangende, übrigens unbestimmte). Setzt man aber statt $\int f_x \cdot dx$ das mit $x = a$ anfangende jedoch noch unbestimmte, so wird, weil $\int_{x \div a} f_x \cdot dx$ für $x = a$ Null ist,

$$\text{X. } \int_{b \div a} (\varphi_x \cdot f_x) \cdot dx$$

$$= (\varphi_x)_b \cdot \int_{b \div a} f_x \cdot dx - \int_{b \div a} \left(\frac{d\varphi}{dx} \cdot \int_{x \div a} f_x \cdot dx \right) \cdot dx.$$

Und wenn man in (IX.) ψ_x statt $\int f_x \cdot dx$ setzt, so nimmt jene Formel noch diese Gestalt an

$$\text{XI. } \int_{b \div a} \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx} \right) \cdot dx = (\varphi_x \cdot \psi_x)_{b \div a} - \int_{b \div a} \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) \cdot dx.$$

Anmerkung. Diese letztere Formel (XI.) könnte man auch so schreiben

$$\int_{b \div a} \varphi \cdot d\psi = (\varphi \cdot \psi)_{b \div a} - \int_{b \div a} \psi \cdot d\varphi,$$

wenn man sich dabei erinnern wollte, daß sie statt der wahren Formel (XI.) steht; oder doch, daß, wenn man auch $\int \varphi \cdot d\psi$ in dem Sinne nimmt, daß φ als Funktion von ψ, nach ψ integrirt werden soll, dann doch nicht statt ψ, sondern statt x nach und nach b und a zu setzen ist, um durch Subtraktion der Resultate das zur Linken der obigen Gleichung angedeutete zu haben. In demselben Sinne müßte $\int_{b \div a} \psi \cdot d\varphi$ aufgefaßt werden.

Dieselbe Formel wäre aber nach (§. 167.) wiederum gut geschrieben, wenn man sie so schreiben wollte

$$\int_{\psi_b \div \psi_a} \varphi \cdot d\psi = (\varphi_x \cdot \psi_x)_{b \div a} - \int_{\varphi_b \div \varphi_a} \psi \cdot d\varphi.$$

Zweite Abtheilung.

Die drei Integrations-Methoden für die Integration entwickelt gegebener Funktionen (Differenzialien).

§. 175.

Methode der unbestimmten Koeffizienten und Exponenten.

Die ganze Kunst des Integrirens gegebener Differenzialien (des Zurückleitens gegebener Funktionen) läßt sich auf 3 Hauptmomente zurückführen.

Das erste dieser Hauptmomente besteht darin, daß man die **Form** des gesuchten Integrals kennt, ahnet und voraussetzt, und nur noch die unbestimmten Koeffizienten und Exponenten so dazu sucht, daß das Differenzial dem gegebenen identisch werde.

1) Setzt man, die Form vermuthend,

$$\int x^m \cdot dx = A \cdot x^\alpha,$$

so erhält man differenzirend,

$$x^m \cdot dx = d(Ax^\alpha) = A\alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot dx;$$

und damit diese Gleichung identisch wird, muß man offenbar

$$A\alpha = 1 \quad \text{und} \quad \alpha - 1 = m \quad \text{nehmen,}$$

woraus $\alpha = m+1$, $A = \frac{1}{m+1}$,

also $\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ *) hervorgeht.

---

*) Dies ist das Resultat des (§. 150. oder §. 151. N. 1.) und gilt für jedes m, wenn nur der Nenner $m+1$ nicht 0 ist. Wollte man erfahren, was sich für $m+1=0$ d. h. für $m=-1$ ergibt, so müßte man zuerst $-1+h$ statt m setzen, und man erhielte

$$\int x^{-1+h} \cdot dx = \frac{1}{h} \cdot x^h = \frac{1}{h} \cdot \left[1 + log\,x \cdot h + (log\,x)^2 \cdot \frac{h^2}{2!} + \cdots\right],$$

weil nach (E. N. 51) x^h der letztgedachten Reihe gleich ist. Das mit $x=1$ anfangende Integral wäre dann

2) Auf dieselbe Weise setzt man

$$\int a^x \cdot dx = A \cdot a^x$$

und erhält durch das Differenziiren

$$a^x \cdot dx = A \cdot a^x \cdot \log a \cdot dx;$$

folglich $1 = A \cdot \log a$ und $A = \frac{1}{\log a}$;

also $$\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\log a},$$

welches die Formel (§. 150. oder §. 151. N. 2) ist.

Diese Methode kann man die Methode der unbestimmten Koffizienten und Exponenten nennen.

§. 176.

Die Reduktions-Methode.

Das zweite Hauptmoment des Integrirens gegebener Differenzialien besteht darin, daß man mittelst der Formeln (§. 169. u. §. 171. I. II. III. IV. oder V.) ein zu findendes Integral auf ein oder mehre andere Integrale zurückführt, in der Hoffnung, daß letztere einfacher und daher leichter zu finden, oder wohl auch zusammengesetzter, aber vielleicht schon bekannt seyn möchten.

1) So findet man sogleich nach (§. 169. I. u. II.)

$$\int Sin\,x \cdot dx = \int \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \cdot dx = \frac{1}{2i}\int (e^{xi} - e^{-xi}) \cdot dx$$
$$= \frac{1}{2i}\int e^{xi} \cdot dx - \frac{1}{2i}\int e^{-xi} \cdot dx.$$

$$\int_{x+1} x^{-1+h} \cdot dx = \log x + (\log x)^2 \cdot \frac{h}{2!} + \cdots,$$

welches für $h = 0$ in $\log x$ übergeht, so daß man erhält

$$\int x^{-1} \cdot dx = \log x \quad \text{oder} \quad \int \frac{1}{x} \cdot dx = \log x,$$

welches die Formel (§. 150. oder §. 151. N. 4.) ist, sobald man bloß ein besonderes Integral verlangt. Dieses letztere wird aber zunächst immer nur verlangt, da das allgemeine Integral aus jedem beliebigen besondern erhalten wird, wenn man die Konstante C noch addirt.

Letztere Integrale, enthalten in der Form $\int e^{px} \cdot dx$, lassen sich nun vielleicht dadurch finden, daß man die vorige Methode anwendet; und in dieser Hoffnung setzt man $\int e^{px} \cdot dx = A \cdot e^{\alpha x}$, damit $e^{px} \cdot dx = A\alpha \cdot e^{\alpha x} \cdot dx$ erhalten werde, woraus dann hervorgeht, daß man $\alpha = p$ und $A\alpha = 1$ nehmen muß, so daß also $A = \frac{1}{p}$ wird, und man

$$\int e^{px} \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot e^{px},$$

also $\int e^{xi} \cdot dx = \frac{1}{i} \cdot e^{xi}$ und $\int e^{-xi} \cdot dx = -\frac{1}{i} \cdot e^{-xi}$

erhält; weshalb nun

$$\int Sin\, x \cdot dx = -\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2} = -Cos\, x$$

hervorgeht.

Eben so fände sich leicht

$$\int Cos\, x \cdot dx = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} = + Sin\, x.$$

Und so findet sich noch weiter

$$\int (x^3 - 3x^2 + 5\sqrt{x}) \cdot dx = \int x^3 \cdot dx - 3\int x^2 \cdot dx + 5\int x^{\frac{1}{2}} \cdot dx$$
$$= \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \tfrac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{4}x^4 - x^3 + \tfrac{10}{3}x\sqrt{x};$$

$$\int (3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} - \tfrac{7}{11}x\sqrt[3]{x^2}) \cdot dx$$
$$= 3\int x^{\frac{1}{3}} \cdot dx - 2\int x^{\frac{3}{2}} \cdot dx - \tfrac{7}{11}\int x^{\frac{5}{3}} \cdot dx$$
$$= \tfrac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} - \tfrac{4}{5}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{21}{88}x^{\frac{8}{3}}$$
$$= \tfrac{9}{4}x\sqrt[3]{x} - \tfrac{4}{5}x^2\sqrt{x} - \tfrac{21}{88}x^2\sqrt[3]{x^2};$$

$$\int \left(\frac{5}{x^7} + \frac{26x^3}{3\sqrt{x}} + \frac{3\sqrt[3]{x}}{x^3}\right) \cdot dx$$
$$= 5\int x^{-7} \cdot dx + \tfrac{26}{3}\int x^{\frac{5}{2}} \cdot dx + 3\int x^{-\frac{8}{3}} \cdot dx$$
$$= -\tfrac{5}{6}x^{-6} + \tfrac{52}{21}x^{\frac{7}{2}} - \tfrac{9}{5}x^{-\frac{5}{3}}$$
$$= -\frac{5}{6x^6} + \tfrac{52}{21}x^3\sqrt{x} - \frac{9}{5x\sqrt[3]{x^2}};$$

u. dergl. m.

2) So findet sich ferner, nach der so wichtigen Reduktions-Formel (IV. oder V. des §. 171.), nämlich aus $\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi$,

$$\int Sin\,x \cdot Cos\,x \cdot dx = Sin\,x^2 - \int Cos\,x \cdot Sin\,x \cdot dx,$$

wo zufällig das Integral zur Rechten dasselbe ist, wie das zur Linken, so daß man diese Gleichung nach dem einzigen darin vorkommenden unbekannten Integral (welches auch durch einen einzigen Buchstaben ausgedrückt seyn könnte) nur algebraisch aufzulösen braucht um sogleich

$$\int Sin\,x \cdot Cos\,x \cdot dx = \tfrac{1}{2} Sin\,x^2$$

zu erhalten.

3) So erhält man nach der eben benutzten Reduktions-Formel (IV. oder V. des §. 171.), also durch die theilweise Integration, sogleich, $\varphi = \frac{1}{Sin}x$, $\psi = x$ setzend,

$$\int \frac{1}{Sin}x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{Sin}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx,$$

wodurch das Integral des durch seinen Sinus gegebenen Bogens $\frac{1}{Sin}x \cdot dx$, auf das Integral eines razionalen Differenzials zurückgeführt wird. Vermuthet man nun, daß letzteres die Form $A \cdot (1-x^2)^\alpha$ haben könne, so setzt man nach der ersten Methode (§. 175)

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = A \cdot (1-x^2)^\alpha,$$

hat also, wenn man differenziirt,

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -2A\alpha(1-x^2)^{\alpha-1} \cdot x \cdot dx,$$

weshalb $\alpha - 1 = -\frac{1}{2}$, $-2A\alpha = 1$, also $\alpha = \frac{1}{2}$ und $A = -1$,

mithin $$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx = -\sqrt{1-x^2},$$

demnach auch

$$\int \frac{1}{Sin}x \cdot dx = x \cdot \frac{1}{Sin}x + \sqrt{1-x^2}$$

gefunden wird.

§. 177.

Anwendung dieser Reduktions-Methode zur Integration aller algebraischen razionalen ganzen oder gebrochenen Funktionen von x.

Nach dieser Reduktions-Methode kann man

I. alle ganzen razionalen Funktionen von x, nach x integriren; denn man hat nach (§. 169. III.)

$$\int(A_0 + A_1 \cdot x + A_2 \cdot x^2 + A_3 \cdot x^3 + \cdots + A_n \cdot x^n) \cdot dx$$
$$= A_0 \cdot \int 1 \cdot dx + A_1 \cdot \int x \cdot dx + A_2 \cdot \int x^2 \cdot dx + A_3 \cdot \int x^3 \cdot dx + \cdots + A_n \cdot \int x^n \cdot dx$$
$$= A_0 \cdot x + \tfrac{1}{2} A_1 \cdot x^2 + \tfrac{1}{3} A_2 \cdot x^3 + \tfrac{1}{4} A_3 \cdot x^4 + \cdots + \frac{1}{n+1} A_n \cdot x^{n+1};$$

II. auch alle gebrochenen und irrazionalen Funktionen von der Form

$$\int(A_0 + A_1 \cdot x^\alpha + A_2 \cdot x^\beta + A_3 \cdot x^\gamma + \cdots) dx,$$

weil solches Integral sogleich

$$= A_0 \cdot x + \frac{A_1}{\alpha+1} \cdot x^{\alpha+1} + \frac{A_2}{\beta+1} \cdot x^{\beta+1} + \frac{A_3}{\gamma+1} \cdot x^{\gamma+1} + \cdots$$

gefunden wird. [M. s. die Beispiele unter (N. 1. des §. 176.)].

III. Die Integration aller gebrochenen razionalen Funktionen von x, nach x, kann mittelst dieser Reduktions-Methode auf die Integration der einfachen Differenzialien

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \cdot dx \qquad \text{oder} \qquad \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \cdot dx,$$

zurückgeführt werden, welche letztere nachher entweder leicht integrirt, oder wiederum auf noch einfachere Integrale zurückgeführt, und zuletzt jedesmal ohne Schwierigkeit wirklich gefunden werden können.

A) Ist nämlich die gebrochene razionale Funktion

$$\frac{A_0 \cdot x^n + A_1 \cdot x^{n-1} + A_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + A_{n-1} \cdot x + A_n}{B_0 \cdot x^m + B_1 \cdot x^{m-1} + B_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + B_{m-1} \cdot x + B_m} \cdot dx,$$

deren Integral gefunden werden soll, eine unächt gebrochene, d. h. ist $n \geqq m$, so dividire man mit dem Nenner in den Zähler, um die ganze Funktion nebst der ächt gebrochenen zu erhalten, in welche sich diese unächt gebrochene zerlegen läßt. Alles kommt daher, da die ganze Funktion allemal integrirt werden kann, darauf an, die ächt gebrochene Funktion integriren zu können.

So würde man z. B. wenn $\int \frac{x^4}{(a+bx)^2} \cdot dx$ gefunden werden sollte, die unächt gebrochene Funktion $\frac{x^4}{(a+bx)^2}$ d. h. $\frac{x^4}{b^2x^2+2abx+a^2}$, zuerst in

$$\frac{1}{b^2}x^2 - 2\frac{a}{b^3}x + 3\frac{a^4}{b^4} - \frac{a^3}{b^4} \cdot \frac{4bx+3a}{b^2x^2+2abx+a^2}$$

verwandeln, und dann die ächt gebrochene Funktion $\frac{4bx+3a}{(a+bx)^2}$ ferner nach dem Folgenden behandeln.

B) Stellt aber die obige Funktion eine solche ächt gebrochene vor, in welcher $n < m$ ist, so kann man solche allemal, den (§§. 118.—124.) zu Folge, in lauter Parzial-Brüche zerlegen, von der Form

$$1)\ \frac{P}{(ax+b)^n} \quad \text{und} \quad 2)\ \frac{P}{ax+b},$$

wo P nach x konstant ist, wenn man nicht vorziehen will, doppelte Faktoren im Nenner zu gebrauchen, also nach (§§. 125.—130.) Parzial-Brüche von der Form

$$3)\ \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \quad \text{und} \quad 4)\ \frac{Px+Q}{ax^2+bx+c}$$

zu erhalten, wo P und Q nach x konstant sind.

C) Nun kann $\int \frac{P}{(ax+b)^n} \cdot dx$ nach der ersten Methode (§. 175.) gefunden werden, indem man

$$\int \frac{P}{(ax+b)^n} \cdot dx = A(ax+b)^\alpha$$

setzt, durch differenziren

$$\frac{P}{(ax+b)^n} \cdot dx = A\alpha a(ax+b)^{\alpha-1} \cdot dx$$

erhält, und dann hieraus

$$\alpha - 1 = -n \quad \text{und} \quad A\alpha a = P,$$

also $\alpha = -n+1 = -(n-1)$ und $A = \frac{P}{a(-n+1)} = -\frac{P}{a(n-1)}$

findet, so daß man hat

$$1) \int \frac{P}{(ax+b)^n} \cdot dx = -\frac{P}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}},$$

welches Resultat für jedes n gilt, ausgenommen für $n = 1$. — Für $n = 1$ findet sich dagegen, ebenfalls die Form voraussetzend, auf demselben Wege sogleich

$$2) \int \frac{P}{ax+b} \cdot dx = -\frac{P}{a} \cdot log(ax+b).$$

D) Hat man indeß vorgezogen bei der Zerlegung in Parzial-Brüche, solche von der Form (B. 3. oder B. 4.) zuzulassen, so setzt man, aus der Differenzial-Rechnung die Form des Gesuchten ahnend und voraussetzend,

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \cdot dx$$
$$= \frac{Gx+H}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \int \frac{P_1x+Q_1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \cdot dx,$$

differenziirt links und rechts, und macht die entstehende Gleichung identisch. Man findet dann

$$P_1 = 0, \qquad Q_1 = \frac{(2n-3)(bP-2aQ)}{(n-1)(b^2-4ac)},$$

$$G = \frac{bP-2aQ}{(n-1)(b^2-4ac)} \quad \text{und} \quad H = \frac{2cP-bQ}{(n-1)(b^2-4ac)};$$

und man hat nun das erstere Integral auf ein einfacheres reduzirt, welches im Nenner nur noch die $(n-1)$te Potenz von ax^2+bx+c enthält. Und setzt man hier die eben für P_1 und Q_1 gefundenen Werthe statt P und Q, und $n-1$ statt n, so

wie P_2, Q_2, G_1, H_1, statt P_1, Q_1, G, H, so findet man dieses letztere Integral zur Rechten wiederum, durch die Gleichung

$$\int \frac{P_1 x + Q_1}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \cdot dx$$

$$= \frac{G_1 x + H_1}{(ax^2+bx+c)^{n-2}} + \int \frac{P_2 x + Q_2}{(ax^2+bx+c)^{n-2}} \cdot dx,$$

auf ein noch einfacheres reduzirt. Und fährt man so fort, so hat man zuletzt nur noch das Integral (B. 4.), nämlich das Integral von der Form

$$\int \frac{P_{n-1} \cdot x + Q_{n-1}}{ax^2+bx+c} \cdot dx$$

zu finden, um die andern alle und zuletzt auch

$$\int \frac{Px+Q}{(ax^2+bx+c)^n} \cdot dx$$

gefunden zu haben.

E) Da man nun, wenn man das Differenziiren verfolgt, bald einsieht, daß man für das Integral (B. 4.) einen Logarithmen, der Form nach, voraussetzen darf, so setze man

$$\int \frac{Px+Q}{ax^2+bx+c} \cdot dx = A \cdot log(ax^2+bx+c) + \int \frac{B}{ax^2+bx+c} \cdot dx,$$

differenziire, mache die entstehende Gleichung identisch, und man erhält

$$Px+Q = A(2ax+b)+B,$$

d. h. $\quad P = 2Aa \quad$ und $\quad Q = Ab+B$

woraus $\quad A = \frac{P}{2a} \quad$ und $\quad B = Q - \frac{bP}{2a} = \frac{2aQ-bP}{2a}$

sich ergibt, so daß man hat

$$\int \frac{Px+Q}{ax^2+bx+c} \cdot dx$$

$$= \frac{P}{2a} \cdot log(ax^2+bx+c) + \frac{2aQ-bP}{2a} \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

Und es bleibt nun noch das einfachste dieser Integrale, nämlich

$$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

zu finden übrig.

F) Solches findet man aber sogleich, wenn man $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ in die beiden einfachen Parzial-Brüche

$$\frac{2a}{\sqrt{b^2-4ac}}\left[\frac{1}{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}-\frac{1}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right]$$

zerlegt, und dann jede derselben nach (C. N. 2.) integrirt, welches

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\left[\log(2ax+b-\sqrt{b^2-4ac})\right.$$
$$\left.-\log(2ax+b+\sqrt{b^2-4ac})\right]$$

gibt, so daß man hat

$$1)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\cdot\log\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}},$$

wobei man jedoch nicht übersehen muß, daß man den Logarithmanden mit jeder beliebigen (nach x) Konstante C noch multipliziren kann, also auch z. B. mit -1 oder dergleichen.

Ist $b^2 < 4ac$ so ist dies Integral zwar noch immer wahr, aber in einer für die Auswerthung in Ziffern wenig praktischen Form, und man muß daher für diesen Fall noch die Formeln (E. N. 36.) anwenden, um diesen Logarithmen in einen durch seinen Sinus oder Kosinus oder durch seine Tangente gegebenen Bogen umzuwandeln; und man erhält dann

$$2)\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\frac{1}{Sin}\frac{(2ax+b)\cdot\sqrt{4ac-b^2}}{4a(ax^2+bx+c)}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\cdot\frac{1}{Cos}\frac{4ac-b^2}{4a(ax^2+bx+c)};$$

nach der Formel

$$\frac{1}{2i} \cdot log \frac{-i + v}{-i - v} = \frac{1}{2i} \cdot log \frac{1 + iv}{1 - iv} = \frac{1}{Tg} v,$$

wenn man nur statt des obigen logarithmischen Integrals dasjenige andere besondere Integral nimmt, welches dadurch aus jenem hervorgehet, daß man den Logarithmanden mit -1 multiplizirt, und wenn man dabei beachtet, daß wenn von einem Bogen die Tangente $= \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}}$ gegeben ist, dann auch sein Sinus und sein Kosinus leicht gefunden, er selber also dann auch durch $\frac{1}{Sin}$ oder durch $\frac{1}{Cos}$, ausgedrückt werden kann.

Ist endlich $b^2 = 4ac$, so ist $c = \frac{b^2}{4a}$, also

$$3) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{4a \cdot dx}{(2ax + b)^2} = -\frac{1}{ax + \frac{1}{2}b};$$

wie man findet, sobald $\int \frac{dx}{(2ax + b)^2} = A(2ax + b)^{\alpha}$ gesetzt, differenzirt, und die entstehende Gleichung durch zweckmäßige Annahme der unbestimmten A und α identisch gemacht wird, wie schon in (C.) gefunden steht.

Beispiel 1. Ist z. B. $\int \frac{5x^3 + 8x - 20}{(x-4)^3 \cdot (x^2 - 4x + 8)} \cdot dx$ zu finden, so zerlegt man zuerst diese gebrochene Funktion in Parzial-Brüche nach (Kap. V. Abth. II.), und erhält

$$1') \frac{5x^3 + 8x - 20}{(x-4)^3 \cdot (x^2 - 4x + 8)} = \frac{83}{2} \cdot \frac{1}{(x-4)^3} + \frac{41}{4} \cdot \frac{1}{(x-4)^2} - \frac{45}{16} \cdot \frac{1}{(x-4)} - \frac{1}{16} \cdot \frac{84 - 45x}{x^2 - 4x + 8},$$

während

$$2') \int \frac{1}{(x-4)^3} \cdot dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{(x-4)^2}, \quad 3') \int \frac{1}{(x-4)^2} \cdot dx = -\frac{1}{x-4}$$

$$\text{und } 4') \int \frac{1}{x-4} \cdot dx = log(x-4)$$

ist.

Ferner kann man setzen nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten d. h. nach (E.)

$$\int \frac{84-45x}{x^2-4x+8}\cdot dx = A\cdot log(x^2-4x+8)+B\int\frac{dx}{x^2-4x+8},$$

und erhält durch Differenziren:

$$\frac{84-45x}{x^2-4x+8} = \frac{A(2x-4)}{x^2-4x+8}+\frac{B}{x^2-4x+8},$$

also $84 = -4A+B$, $-45 = 2A$;

mithin $A = -\frac{45}{2}$, $B = 84-90 = -6$;

demnach

$$5') \int \frac{84-45x}{x^2-4x+8}\cdot dx = -\tfrac{45}{2}\cdot log(x^2-4x+8)-6\int\frac{dx}{x^2-4x+8}.$$

Und nach (F. N. 2.) findet man noch

$$6') \int\frac{dx}{x^2-4x+8} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{Tg}(\tfrac{1}{2}x-1).$$

Also hat man zuletzt, diese Werthe aus (2'.—6'.) in (1'.) substituirend, nachdem daselbst links und rechts die Integrale genommen gedacht werden:

$$\int\frac{5x^3+8x-20}{(x-4)^3\cdot(x^2-4x+8)}\cdot dx = -\frac{83}{4(x-4)^2}-\frac{41}{4(x-4)}-\tfrac{45}{16}\cdot log(x-4)$$

$$+\tfrac{45}{32}\cdot log(x^2-4x+8)+\tfrac{3}{16}\cdot\frac{1}{Tg}(\tfrac{1}{2}x-1)$$

$$=\frac{81-41x}{4(x-4)^2}+\tfrac{45}{32}\cdot log\frac{x^2-4x+8}{(x-4)^2}+\tfrac{3}{16}\cdot\frac{1}{Tg}(\tfrac{1}{2}x-1).$$

Beispiel 2. Ist $\int\frac{x^3-12x+20}{(x^2+12)^2\cdot(3x-8)}\cdot dx$ zu finden, so findet sich zuerst durch Zerlegung in Parzial-Brüche

$$1') \frac{x^3-12x+20}{(x^2+12)^2\cdot(3x-8)}$$

$$= \frac{141}{7396}\cdot\frac{1}{3x-8}+\frac{33x-256}{43(x^2+12)^2}+\frac{-47x+2340}{7396(x^2+12)}.$$

Dann aber hat man $2') \int\frac{dx}{3x-8} = \tfrac{1}{3}\cdot log(3x-8)$,

und nach dem Verfahren (D.), wenn man $P = 33$, $Q = -256$, $n = 2$, $a = 1$, $b = 0$, $c = 12$ setzt,

$$3') \int\frac{33x-256}{(x^2+12)^2}\cdot dx = -\frac{\frac{32}{3}x+\frac{33}{2}}{x^2+12}-\tfrac{32}{3}\int\frac{dx}{x^2+12},$$

so wie nach (E.)

$$4') \int \frac{-47x + 2340}{x^2 + 12} \cdot dx = -\tfrac{47}{2} \cdot log(x^2 + 12) + 2340 \int \frac{dx}{x^2 + 12};$$

endlich aber nach (F. N. 2.)

$$5') \int \frac{dx}{x^2 + 12} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Wenn man endlich die Werthe aus (2'.—5'.) in (1'.) nachdem daselbst links und rechts die Integrale genommen gedacht sind, substituirt, so wird das gesuchte Integral

$$\int \frac{x^3 - 12x + 20}{(x^2+12)^2 (2x-8)} \cdot dx = \frac{47}{7396} \cdot log(3x - 8) - \frac{64x + 99}{258(x^2 + 12)}$$
$$- \frac{47}{14793} \cdot log(x^2 + 12) + \left(-\frac{32}{129} + \frac{2340}{7396}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{x}{2\sqrt{3}}.$$

Beispiel 3. Ist ferner $\int \frac{dx}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3}$ zu finden, so muß der Nenner $x^8 + x^7 - x^4 - x^3$ zuerst in $x^3(x^5 + x^4 - x - 1)$, dann in $x^3(x+1)(x^4 - 1)$, ferner in $x^3(x+1)(x^2+1)(x^2 - 1)$, zuletzt in $x^3(x+1)(x^2+1)(x-1)(x+1)$ d. h. in $x^3(x+1)^2(x-1)(x^2+1)$ zerlegt werden, und dann erhält man durch Zerlegung in Parzial-Brüche:

$$1') \frac{1}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3} = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{1}{x-1} + \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \tfrac{9}{8} \cdot \frac{1}{x+1}$$
$$- \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Dabei ist aber

$$2') \int \frac{dx}{x-1} = log(x-1), \qquad 3') \int \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x+1},$$

$$4') \int \frac{dx}{x+1} = log(x+1), \qquad 5') \int \frac{dx}{x^3} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2},$$

$$6') \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}, \qquad 7') \int \frac{dx}{x} = log\, x.$$

Zuletzt hat man nach (E.)

$$8') \int \frac{x+1}{x^2+1} \cdot dx = \tfrac{1}{2} \cdot log(x^2 + 1) + \int \frac{dx}{1 + x^2},$$

während nach (F. N. 2.)

$$9') \int \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{Tg} x$$ ist.

Substituirt man aber (2'. — 9'.) in (1'.) nachdem man daselbst vorher links und rechts die Integrale genommen hat, so erhält man

$$\int \frac{dx}{x^8 + x^7 - x^4 - x^3}$$

$$= \frac{2 - 2x - 5x^2}{4x^2(1+x)} + \tfrac{1}{8} \cdot log \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + log \frac{x+1}{x} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{Tg} x.$$

§. 178.

Die Substitutions-Methode.

Das dritte und letzte Hauptmoment, worauf sich alles Integriren gegebener Differenzialien $\varphi_x \cdot dx$ zurückzieht, besteht in der Anwendung des Hauptlehrsatzes (☉ §. 165. u. §. 166.). Sie besteht namentlich darin, daß man zwischen x und einem neuen Variablen z eine schickliche Gleichung annimmt, daraus x in z und zugleich dx in z und dz ausdrückt, diese Werthe statt x und dx in $\varphi_x \cdot dx$ substituirt, und sonach

$$\int \varphi_x \cdot dx = \int \psi_z \cdot dz$$

erhält, in der Hoffnung, daß letzteres Integral (in z) entweder schon gefunden ist, oder doch durch eine der frühern Methoden leichter gefunden werden kann.

1) So findet sich $\int (ax+b)^m \cdot dx$, wenn $ax + b = z$, gesetzt wird, so daß $x = \frac{z-b}{a}$, $dx = \frac{dz}{a}$ und

$$\int (ax+b)^m \cdot dx = \frac{1}{a} \int z^m \cdot dz$$

hervorgeht; weil dann $\int z^m \cdot dx = \frac{z^{m+1}}{m+1}$ schon bekannt ist, und demnach

$$\int (ax+b)^m \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}$$

wird, welches für jeden Werth von m gilt, der nicht $m + 1 = 0$ macht, während für $m = -1$

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot log(ax+b)$$

auf demselben Wege, jedesmal mit Zuziehung der Integrale der einfachsten Funktionen (§. 151.), sich ergibt.

Auf diesem Wege hätte man also auch die Integrale (§. 177. C. 1. u. 2) ohne Weiteres gefunden, so wie noch das (§. 176.) gefundene $\int e^{px} \cdot dx$, indem man $px = z$, also $p \cdot dx = dz$, $dx = \frac{1}{p} \cdot dz$ gesetzt und gehabt, übrigens aber (§. 151. N. 2) in Anwendung gebracht hätte.

2) Um $\int \frac{x^4}{(a+bx)^2} \cdot dx$ zu finden, würde man $a+bx = z$ setzen, hätte $x = \frac{z-a}{b}$, $dx = \frac{1}{b} \cdot dz$ und

$$x^4 = \frac{z^4 - 4az^3 + 6a^2z^2 - 4a^3z + a^4}{b^4};$$

also
$$\int \frac{x^4}{(a+bx)^2} \cdot dx = \frac{1}{b^5} \int (z^2 - 4az + 6a^2 - 4a^3z^{-1} + a^4z^{-2}) \cdot dz$$
$$= \frac{1}{b^5}\left(\tfrac{1}{3}z^3 - 2az^2 + 6a^2z - 4a^3 \cdot \log z - \frac{a^4}{z}\right)$$
$$= \frac{1}{b^5}\Big[\tfrac{1}{3}(a+bx)^3 - 2a(a+bx)^2 + 6a^2(a+bx)$$
$$- 4a^3 \cdot \log(a+bx) - \frac{a^4}{a+bx}\Big];$$

und dieser Weg ist bequemer als der für dasselbe Beispiel (§. 177. A.) vorgeschlagene, obgleich beide Wege zu demselben Resultat führen.

Auf dieselbe Weise würde man bei Auffindung von $\int \frac{3+2x-5x^2}{30-x} \cdot dx$, eben so zum Ziele kommen, wenn man $x - 30 = z$, $x = 30 + z$ setzen wollte, als wenn man nach (§. 177. A.) diese unächt gebrochene Funktion $\frac{5x^2-2x-3}{x-30}$ zuvor in die ganze Funktion $5x + 148$ und in die ächt gebrochene $\frac{4437}{x-30}$ verwandeln und dann

$$\int \frac{3+2x-5x^2}{30-x} \cdot dx = \tfrac{5}{2}x^2 + 148x + 4437 \cdot \log(x-30)$$

hätte finden wollen.

3) Um $\int Sin\, x \cdot Cos\, x \cdot dx$ zu finden, könnte man $Sin\, x = z$ setzen, hätte dann differenzirend, $Cos\, x \cdot dx = dz$,

also $\int Sin\, x \cdot Cos\, x \cdot dx = \int z \cdot dz = \tfrac{1}{2}z^2 = \tfrac{1}{2} Sin\, x^2$,

wie solches bereits (§. 176. 2.) gefunden worden ist.

4) Um $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zu finden, setze man $\sqrt{1-x^2} = z$, also $1-x^2 = z^2$; differenzire, um $-x \cdot dx = z \cdot dz$ zu erhalten, und man hat

$$\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int 1 \cdot dz = -z = -\sqrt{1-x^2},$$

wie solches (§. 177. 3.) bereits auf anderm Wege gefunden worden ist.

5) Um $\int \frac{(\log px)^n}{x} \cdot dx$ zu finden, könnte man $\log px = z$ setzen, hätte differenzirend $\frac{dx}{x} = dz$,

also $$\int \frac{(\log px)^n}{x} \cdot dx = \int z^n \cdot dz = \frac{z^{n+1}}{n+1} = \frac{(\log px)^{n+1}}{n+1}.$$

6) Um $\int Tg\,x \cdot dx$ zu finden, könnte man, weil $Tg\,x = \frac{Sin\,x}{Cos\,x}$ ist, $Sin\,x = z$ setzen, hätte dann differenzirend, $Cos\,x \cdot dx = dz$,

also $$\int Tg\,x \cdot dx = \int \frac{z}{1-z^2} \cdot dz.$$

Und um nun dieses letztere Integral zu finden, könnte man dieselbe Methode anwenden, und $1-z^2 = v$ setzen, hätte, differenzirend, $-2z \cdot dz = dv$,

also $$\int \frac{z}{1-z^2} \cdot dz = -\tfrac{1}{2}\int \frac{dv}{v} = -\tfrac{1}{2} \log v = -\log \sqrt{1-z^2}.$$

Demnach, weil $\sqrt{1-z^2} = Cos\,x$ wird,

$$\int Tg\,x \cdot dx = -\log Cos\,x = \log Sec\,x.$$

§. 179.

Anwendung dieser Methode um transzendente Integrationen in algebraische, besonders aber um die einfachern algebraisch-irrazionalen, in algebraisch-razionale zu verwandeln.

Man bedient sich aber unter andern dieser Substitutions-Methode, um die Integration transzendenter Funktionen auf die von algebraischen (razionalen oder irrazionalen), vorzüglich aber, um die Integration irrazionaler Funktionen auf die von razionalen ganzen oder gebrochenen zurückzuführen.

I. Wie transzendente Differenzialien auf algebraische zurückgeführt werden.

A) Ist z. B. φ irgend eine algebraische Funktion von $Sin\, x$ und $Cos\, x$, die aber nicht den Bogen x selber enthält, und $\int \varphi \cdot dx$ zu finden, so setze man entweder $Sin\, x = z$ oder $Cos\, x = z$ oder $Tg\, x = z$ d. h. $\frac{Sin\, x}{Cos\, x} = z$, differenzire sogleich, um auch dx in dz zu erhalten, und es wird $\int \varphi \cdot dx$ allemal $= \int \psi_z \cdot dz$ werden, wo ψ_z eine algebraische Funktion von z ist (razional oder irrazional).

1) So erhielte man z. B. wenn $\int Sin\, x^m \cdot Cos\, x^n \cdot dx$ gefunden werden sollte, indem man $Sin\, x = z$ setzt, $Cos\, x \cdot dx = dz$, also $Cos\, x = \sqrt{1-z^2}$ und $dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$, mithin

$$\int Sin\, x^m \cdot Cos\, x^n \cdot dx = \int z^m \cdot (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot dz,$$

welches letztere Differenzial in z algebraisch ist.

2) So reduzirt sich $\int \frac{dx}{(a+b\, Cos\, x)^n}$, wenn $Cos\, x = z$ gesetzt wird, so daß man $-Sin\, x \cdot dx = dz$, $dx = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ hat, auf

$$-\int \frac{dz}{(a+bz)^n \cdot \sqrt{1-z^2}},$$

welches die Integration eines irrazionalen Differenzials erfordert.

3) So reduzirt sich noch $\int \frac{a_1 + b_1 \cdot Sin\, x}{(a+b \cdot Cos\, x)^n} \cdot dx$ durch dieselbe Substitution auf

$$-\int \frac{a_1 + b_1 \cdot \sqrt{1-z^2}}{(a+bz)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \cdot dz$$

d. h. auf

$$-a_1 \int \frac{1}{(a+bz)^n \cdot \sqrt{1-z^2}} \cdot dz - b_1 \int \frac{dz}{(a+bz)^n},$$

also auf die Integration algebraischer Differenzialien.

B) Ist φ_x irgend eine algebraische Funktion von a^x, e^x oder von a^x, e^x, $Sin(px+q)$ und $Cos(px+q)$, die aber nicht x

selbst enthält, so setze man $e^x = z$ *) oder $x = log\, z$ und hat dann

$$a^x = e^{x \cdot log\, a} \quad = (e^x)^{log\, a} \quad = z^{log\, a},$$

$$d(e^x) = e^x \cdot dx, \text{ also } dz = z \cdot dx \text{ und } dx = \frac{dz}{z},$$

$$Sin(px+q) = \frac{e^{(px+q)\cdot i} - e^{-(px+q)\cdot i}}{2i} = \frac{e^{q\cdot i} \cdot z^{p\cdot i} - e^{-q\cdot i} \cdot z^{-p\cdot i}}{2i},$$

$$Cos(px+q) = \frac{e^{(px+q)\cdot i} + e^{-(px+q)\cdot i}}{2} = \frac{e^{q\cdot i} \cdot z^{p\cdot i} + e^{-q\cdot i} \cdot z^{-p\cdot i}}{2};$$

und alle diese Werthe in $\varphi_x \cdot dx$ statt a^x, e^x, dx, $Sin(px+q)$, $Cos(px+q)$ gesetzt, verwandeln $\varphi_x \cdot dx$ in $\psi_z \cdot dz$, während ψ_z eine algebraische Funktion von z ist.

1) Hätte man z. B. $\int \frac{a^x}{\sqrt{1+a^{nx}}} \cdot dx$ zu finden, so setzte man

$a^x = z$, also $a^x \cdot log\, a \cdot dx = dz$, d. h. $dx = \frac{dz}{z \cdot log\, a}$,

und $a^{nx} = (a^x)^n = z^n$; und es findet sich

$$\int \frac{a^x}{\sqrt{1+a^{nx}}} \cdot dx = \frac{1}{log\, a} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{1+z^n}},$$

welches letztere algebraisch ist.

2) Wäre aber $\int e^{ax} \cdot Sin\, px \cdot Cos\, qx \cdot dx$ zu finden, so würde man, $e^x = z$ setzend, erhalten

$$\int e^{ax} \cdot Sin\, px \cdot Cos\, qx \cdot dx = \frac{1}{4i} \int z^{a-1} \cdot (z^{p\cdot i} - z^{-p\cdot i})(z^{q\cdot i} + z^{-q\cdot i}) \cdot dz,$$

welches letztere algebraisch ist. **)

---

*) Daß man $a^x = e^{x \cdot log\, a} = z$ oder $x = \frac{log\, z}{log\, a}$ setzen könne, um denselben Zweck zu erreichen, fällt demjenigen, welcher einige Beispiele auf diese Weise durchzuführen versucht, ohne Weiteres in die Augen.

**) Diese Wege unter (A. u. B.) gewähren aber sehr selten wirkliche Vortheile, weil das neue zu integrirende Differenzial, obgleich algebraisch, häufig so verwickelt irrazional wird, daß man doch nicht

II. Wie algebraische irrazionale Differenzialien auf razionale zurückgeführt werden.

A) Ist aber φ_x irgend eine razionale Funktion (eine ganze oder gebrochene) aus x und $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$, $(a+bx)^{\frac{p}{q}}$, $(a+bx)^{\frac{r}{s}}$ (also eine irrazionale Funktion von x, aber von dieser besonderen Zusammensetzung), so hat man nur

$$a+bx = z^{nqs}$$

zu setzen, um dann differenziirend

$$b \cdot dx = nqs \cdot z^{nqs-1} \cdot dz \qquad \text{zu haben,}$$

während

$$(a+bx)^{\frac{m}{n}} = z^{mqs},\ (a+bx)^{\frac{p}{q}} = z^{pns} \text{ und } (a+bx)^{\frac{r}{s}} = z^{nqr}$$

wird, so daß $\int \varphi_x \cdot dx$ in $\int f_z \cdot dz$ übergeht, wo f_z eine bloße razionale ganze oder gebrochene Funktion von z ist. *)

1) Ist z. B. $\int (3x^2-5x+8)\sqrt[3]{(5x+2)^2} \cdot dx = y$ zu finden, so setze man $5x+2 = z^3$, so wird $x = \frac{1}{5}(z^3-2)$, $dx = \frac{3}{5}z^2 \cdot dz$, $3x^2-5x+8 = \frac{1}{25}(3z^6-37z^3+262)$, $\sqrt[3]{(5x+2)^2} = z^2$,

also $y = \frac{3}{125}\int(3z^{10}-37z^7+262z^4) \cdot dz = \frac{3}{125}(\frac{3}{11}z^{11} - \frac{37}{8}z^8 + \frac{262}{5}z^5)$

$$= \frac{3}{125}\sqrt[3]{(5x+2)^2} \cdot [\tfrac{3}{11}(5x+2)^3 - \tfrac{37}{8}(5x+2)^2 + \tfrac{262}{5}(5x+2)].$$

2) Ist $\int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2}}{1+\sqrt[3]{x}} \cdot dx = y$ zu finden, so setze man $x = z^6$, woraus folgt $\sqrt{x} = z^3$, $\sqrt[3]{x} = z^2$, $dx = 6z^5 \cdot dz$,

---

zu einem erwünschten Ende kommen kann. Hinsichtlich des Praktischen muß daher das nächste Kapitel noch besonders berücksichtigt werden, während das gegenwärtige Kapitel nur die verschiedenen Gesetze und die verschiedenen Methoden und Wege des Integrirens hinstellen will, ohne gerade immer das bloß Praktische im Auge zu haben.

*) Kommt $a+bx$ nur einmal unter dem Wurzelzeichen vor, so daß φ_x bloß eine irrazionale Funktion von x und $(a+bx)^{\frac{m}{n}}$ ist, so kann man $a+bx = z^n$, man kann aber auch bloß $a+bx = z$ setzen. — In beiden Fällen erreicht man denselben Hauptzweck.

also $y = \int 6\frac{1+z^3-z^4}{1+z^2}\cdot z^5\cdot dz = 6\int\frac{z^5+z^8-z^9}{1+z^2}dz.$

Diese gebrochene Funktion in z wird aber nun integrirt, indem man die ganze Funktion herausdividirt, und zuletzt die übrig bleibende ächt gebrochene Funktion für sich integrirt, nach (§. 177.). —
Man erhält dann

$$y = 6\int\left(-z^7+z^6+z^5-z^4+z^2-1+\frac{1}{1+z^2}\right)dz$$

$$= 6\left(-\tfrac{1}{8}z^8+\tfrac{1}{7}z^7+\tfrac{1}{6}z^6-\tfrac{1}{5}z^5+\tfrac{1}{3}z^3-z+\frac{1}{Tg}z\right)$$

$$= -\tfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+\tfrac{6}{7}x\sqrt[6]{x}+x-\tfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+\frac{1}{Tg}\sqrt[6]{x}.$$

3) Wäre endlich $\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} = y$ zu finden, so setzte man $1+x = z^6$, hätte dann $dx = 6z^5\cdot dz$, $\sqrt[3]{1+x} = z^2$, $\sqrt{1+x} = z^3$ und $y = \int 6\frac{z^6-1}{z^2-z^3}z^5\,dz = 6\int\frac{z^9-z^3}{1-z}dz.$

Man muß nun hier wieder die unächt gebrochene Funktion durch Division mit $1-z$ oder $z-1$ in eine ganze und ächt gebrochene verwandeln, und dann jedes für sich integriren, nach (§. 177.). — Hier aber ist es vortheilhafter $1-z = v$ zu setzen, man hat dann $-dz = dv$ und $y = 6\int\frac{-(1-v)^9+(1-v)^3}{v}dv$, welches Integral sogleich gefunden wird, wenn man den Zähler nach dem Binomischen Lehrsatze entwickelt. Zuletzt muß $v = 1-z = 1-\sqrt[6]{1+x}$ gesetzt werden, um das gesuchte Resultat in x zu haben.

B) Ist aber φ_x eine (ganze oder gebrochene) razionale Funktion von x und $\left(\frac{a+bx}{c+gx}\right)^{\frac{m}{n}}$ und $\left(\frac{a+bx}{c+gx}\right)^{\frac{p}{q}}$ und $\left(\frac{a+bx}{c+gx}\right)^{\frac{r}{s}}$ (also an sich wiederum eine irrazionale Funktion von x, aber wiederum von dieser besondern Zusammensetzung), so setze man

$$\frac{a+bx}{c+gx} = z^{nqs}, \text{ erhält } x = \frac{a-c\cdot z^{qrs}}{g\cdot z^{qrs}-b},$$

daraus dx razional in z und dz, wodurch

$$\int\varphi_x\cdot dx \quad \text{in} \quad \int f_z\cdot dz$$

übergeht, während f_z bloß eine razionale (ganze oder gebrochene) Funktion von z ist, so daß $\int f_z \cdot dz$ nach (§. 177.) gefunden werden kann.

Soll z. B. $\int \frac{x \cdot \sqrt[3]{(1+x)^2} \cdot \sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(1+x)} \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2} - \sqrt[3]{(1+x)} \cdot \sqrt[6]{(1-x)^5}} \cdot dx = y$ gefunden werden, so läßt sich, indem man Zähler und Nenner durch $\sqrt{(1-x)} \cdot \sqrt[3]{(1-x)^2}$ wegdividirt, zunächst

$$y = \int \frac{x \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} - \sqrt[3]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}} \cdot dx$$ daraus machen.

Und deshalb wird man hier zum Ziele kommen, wenn man $\frac{1+x}{1-x} = z^6$ setzt, in so ferne dann so gleich eine razionale und gebrochene Funktion von z erscheinen wird.

C) Und ist φ_x eine razionale Funktion von x^n und $(a+bx^n)^{\frac{p}{q}}$, $(a+bx^n)^{\frac{r}{s}}$, u. s. f., so findet sich $\int x^{n-1} \cdot \varphi_x \cdot dx$ sogleich in $\int f_z \cdot dz$ verwandelt, wo f_z eine razionale Funktion von z ist, wenn man

$$a+bx^n = z^{qs\cdots}$$

setzt.

Und eben so wird $\int x^{n-1} \cdot \varphi_x \cdot dx$ in $\int f_z \cdot dz$ verwandelt, wo f_z eine bloß razionale Funktion von z ist, so bald φ_x eine razionale Funktion von x^n und $\left(\frac{a+bx^n}{c+gx^n}\right)^{\frac{p}{q}}$, $\left(\frac{a+bx^n}{c+gx^n}\right)^{\frac{r}{s}}$, 2c. 2c. ist, wenn man nur $\frac{a+bx^n}{c+gx^n} = z^{qs\cdots}$ setzt.

1) Wäre z. B. $\int \frac{x^5}{\sqrt[3]{(1-x^2)} - \sqrt{(1-x^2)^3}} \cdot dx = y$ zu finden, so dürfte man nur $1-x^2 = z^6$ setzen, und das Integral würde augenblicklich in das einer gebrochenen razionalen Funktion von z übergehen.

2) Und eben so würde $\int \frac{x\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{(1-x^4)}-\sqrt{(1-x^4)}}{x^3}\cdot dx = y$

sich sogleich in $\int \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{1-x^4}\right)}-1}{x^4\sqrt{\left(\frac{x^4}{1-x^4}\right)}}\cdot x^3 dx = y$ umwandeln lassen;

und so sieht man nun, daß dieses Integral in das einer gebrochenen Funktion verwandelt wird, wenn man $\frac{x^4}{1-x^4} = z^6$ setzt.

D) Ist φ_x eine beliebige razionale Funktion von x, $\sqrt{a+bx}$ und $\sqrt{f+gx}$, so setze man nur, um $\int\varphi_x\cdot dx$ zu verwandeln, $\sqrt{a+bx} = v\cdot\sqrt{f+gx}$, also $a+bx = v^2\cdot(f+gx)$, und

$$x = \frac{f\cdot v^2-a}{b-gv^2},\qquad dx = 2\frac{bf-ag}{(b-gv^2)^2}\cdot v\,dv,$$

$\sqrt{f+gx} = \frac{\sqrt{bf-ag}}{\sqrt{b-gv^2}}$. — Und $\int\varphi_x\cdot dx$ reduzirt sich demnach auf ein anderes $\int\psi_v\cdot dv$, wo ψ_v keine Wurzel mehr enthält als die $\sqrt{b-gv^2}$.

Wie nun dieses $\int\psi_v\cdot dv$ in das Integral eines razionalen Differenzials verwandelt werde, soll die folgende (Lit. E.) lehren.

E) Ist φ_x irgend eine (ganze oder gebrochene) razionale Funktion von x und $\sqrt{a+bx+cx^2}$ (also wiederum eine irrazionale Funktion von x, aber von dieser bestimmten Zusammensetzung), so setze man

entweder $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a}+xz$

oder $\sqrt{a+bx+cx^2} = z+\sqrt{c}\cdot x$

oder $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c}\cdot(x-\alpha)\cdot z$,

wenn im letztern Fall $x^2+\frac{b}{c}x+\frac{a}{c}$ in die Faktoren $(x-\alpha)$ $(x-\beta)$ zerlegt worden ist, so daß man auch noch

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c}\cdot(x-\beta)\cdot z$$

setzen kann; und in jedem Falle wird sich x und dx und dann

auch $\sqrt{a+bx+cx^2}$, in z und dz razional ausdrücken lassen, so daß sich $\int \varphi_x \cdot dx$ sogleich in $\int f_z \cdot dz$ verwandeln läßt, wo f_z bloß eine razionale (ganze oder gebrochene) Funktion von z seyn wird. Das Integral läßt sich dann sogleich nach (§.177.) weiter behandeln und finden.

1) Ist z. B. $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ zu finden, so setze man $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{a}+xz$, und man erhält $x = \frac{2z\sqrt{a}-b}{c-z^2}$,

$\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{\sqrt{a}\cdot(c+z^2)-bz}{c-z^2}$, $dx = 2\frac{\sqrt{a}\cdot(c+z^2)-bz}{(c-z^2)^2}$,

also $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = 2\int \frac{dz}{c-z^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot \log \frac{z+\sqrt{c}}{z-\sqrt{c}},$$

während $z = \frac{-\sqrt{a}\pm\sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$ gefunden wird.

Hätte man $\sqrt{a+bx+cx^2} = z+x\cdot\sqrt{c}$ gesetzt, so hätte man erhalten: $x = \frac{z^2-a}{b-2z\sqrt{c}}$, $dx = 2\frac{bz-(z^2+a)\sqrt{c}}{(b-2z\sqrt{c})^2}\cdot dz$,

$\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{bz-(z^2+a)\sqrt{c}}{b-2z\sqrt{c}}$,

und daher

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = 2\int \frac{dz}{b-2z\sqrt{c}} = -\frac{1}{\sqrt{c}} \log(z\sqrt{c}-\tfrac{1}{2}b)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot \log(-\tfrac{1}{2}b-cx+\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}),$$

welches wiederum ein Integral ist, und mit dem oben gefundenen entweder genau zusammen fällt, oder doch von ihm nur um eine Konstante (nach x) verschieden ist. *)

Hätte man endlich $a+bx+cx^2$ in $c\cdot(x-\alpha)(x-\beta)$ zerlegt, wo $\alpha = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ und $\beta = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ ist, so könnte man auch $\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c}\cdot z\cdot(x-\alpha)$ setzen, hätte dann $\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)} = z(x-\alpha)$, also $x-\beta = z^2(x-\alpha)$, $z = \sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$,

---

*) Subtrahirt man dieses Integral von dem zuerst gefundenen, so bleibt $\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot \log[-(\sqrt{ac}+\tfrac{1}{2}b)]$ als die Konstante, um welche beide von einander verschieden sind.

$$x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2},\quad dx = 2\frac{(\beta-\alpha)z}{(1-z^2)^2}\cdot dz,\quad \sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c}\cdot\frac{(\beta-\alpha)z}{1-z^2};$$

folglich $\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{2}{\sqrt{c}}\int\frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log\frac{z+1}{z-1}$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log\frac{2cx+b+2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log\frac{\sqrt{x-\beta}+\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x-\beta}-\sqrt{x-\alpha}},$$

wo man auch den (nach x) konstanten Nenner $\sqrt{b^2-4ac}$ weglassen kann, in so ferne man dann ein anderes der besondern Integrale erhält, nämlich

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log(2cx+b+2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}).$$

Wendet man diese Resultate auf $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ an, so hat man $a = 1$, $b = 0$, $c = -1$, und nach den 3 hier hingestellten Formen

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i}\cdot log\frac{-1+\sqrt{1-x^2}+ix}{-1+\sqrt{1-x^2}-ix},$$

oder $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{i}\cdot log(x+i\cdot\sqrt{1-x^2}),$$

oder $$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{i}\cdot log(-2x+2i\sqrt{1-x^2}),$$

oder $= \frac{1}{i}\cdot log(-x+i\sqrt{1-x^2})$,

oder $= \frac{1}{i}\cdot log(x-i\cdot\sqrt{1-x^2})$,

welche 3 Resultate imaginäre Form haben, aber bekanntlich nach (E. 36.) in Bogen umgewandelt werden können. Es ist nämlich

$e^{zi} = Cos\, z+i\cdot Sin\, z$, also $z = \frac{1}{i}\cdot log(Cos\, z+i\cdot Sin\, z)$,

mithin, wenn man $Cos\, z = x$ setzt,

ist $z = \overset{1}{Cos}\, x$ und $\overset{1}{Cos}\, x = \frac{1}{i}\cdot log(x+i\cdot\sqrt{1-x^2})$;

folglich auch

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\overset{1}{Cos}\, x,$$

und noch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{1}{Cos}x = \frac{1}{Sin}x,$$

welches letztere $\frac{1}{Sin}x$ jedoch ein anderes der besondern Integrale ist, als $-\frac{1}{Cos}x$.

Man kann aber natürlich schon die für $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ gefundenen logarithmischen Ausdrücke in Bogenausdrücke umwandeln, wenn man sonst dazu Lust oder Veranlassung hat, der (E. 36.) zu Folge.

2) Sollte $\int \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx$ gefunden werden, so konnte man wiederum

$$\sqrt{a+bx+cx^2} \text{ entweder } = \sqrt{a} + x \cdot z$$
$$\text{oder } = z + x \cdot \sqrt{c}$$
$$\text{oder } = \sqrt{c} \cdot (x-\alpha) \cdot z$$

setzen, so daß

$$z = \frac{-\sqrt{a} + \sqrt{a+bx+cx^2}}{x}$$
$$\text{oder } = -x \cdot \sqrt{c} + \sqrt{a+bx+cx^2}$$
$$\text{oder } = \sqrt{\frac{x-\beta}{x-\alpha}}$$

geworden seyn würde, und man hätte erhalten

$$\int \sqrt{a+bx+cx^2} \cdot dx = 2\int \frac{((c+z^2)\sqrt{a}-bz)^2}{(c-z^2)^3} \cdot dz$$

oder

$$= 2\int \frac{(bz-(z^2+a)\sqrt{c})^2}{(b-2z \cdot \sqrt{c})^3} \cdot dz$$

oder

$$= 2\sqrt{c}(\beta-\alpha)^2 \cdot \int \frac{z^2}{(1-z^2)^3} \cdot dz.$$

In jedem dieser 3 Fälle müßte man nun das Differenzial nach z in seine einfachen Parzial-Brüche zerlegen (im zweiten Falle aber vorher die ganze Funktion heraus dividiren) und dann diese einzelnen Integrale addiren.

Weil aber diese Arbeit viel Rechnung erfordert, so würde man hier lieber erst reduziren und $\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{a+bx+cx^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$,

also $\int\sqrt{a+bx+cx^2}\cdot dx = a\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

$$+b\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+c\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

schreiben, und letztere Integrale für sich behandeln, wie später noch gezeigt werden soll.

3) Sollte $\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx$ gefunden werden, so könnte man wieder $\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{a}+xz$ setzen, und man erhielte

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx = 2\int\frac{(2z\sqrt{a}-b)^2}{(c-z^2)^3}\cdot dz.$$

Setzte man $\sqrt{a+bx+cx^2}=z+x\sqrt{c}$, so erhielte man

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx = 2\int\frac{(z^2-a)^2}{(b-2z\sqrt{c})^3}\cdot dz.$$

Oder man setzte $\sqrt{a+bx+cx^2}=\sqrt{c}\cdot(x-\alpha)\cdot z$ und es ergäbe sich

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx = \frac{2}{\sqrt{c}}\int\frac{(\beta-\alpha z^2)^2}{(1-z^2)^3}\cdot dz;$$

und in jedem Falle wäre die Aufgabe auf die Integration eines razionalen (gebrochenen) Differenzials zurückgeführt, welches nun nach (§. 177.) behandelt werden kann. *)

---

*) Man konnte aber auch, um $\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\cdot dx$ zu finden, die ersten Methoden (§§. 175. u. 176.) anwenden und solches Integral

$$=(Ax+B)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}+C\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

setzen, nun differenziren, und die Resultate durch schickliche Annahme von A, B und C identisch machen. Man findet dann $A=\frac{1}{2c}$, $B=-\frac{3b}{4c^2}$ und $C=\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}$, also daß man hat

Schluß-Anmerkung.

Die Anfänger werden sehr dringend gebeten, solche Rechnungen, wie sie hier meist nur angedeutet sind, wirklich auszuführen, weil dann während der Ausführung gewöhnlich in die Sinne fällt, warum man gerade diese und keine andere Form des Integrals vorausgesetzt hat. Nur erst durch viele mißglückte Versuche kann es der Anfänger dahin bringen, in der Zukunft das Rechte schnell und sicher zu treffen. Wenn daher auch in dem nächsten Kapitel die gewöhnliche Praxis erst mitgetheilt wird, so wird es doch dem Anfänger von ungemeinem Vortheile seyn, wenn er vorläufig die hier entwickelten Gesetze und Methoden des Integrirens auf viele gegebene Beispiele anwendet, und zu dem Ende die Uebungsbeispiele des (§. 42. a.) hervorsucht und umkehrt, d. h. in ihnen das dort gefundene Differenzial (die Ableitung ∂y noch mit dx multiplizirt) als gegeben ansieht, und die Urfunktion (y), durch Integration nach den hier mitgetheilten Gesetzen und Methoden aufzufinden versucht.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{4c^2}\right)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2} + \left(\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}},$$

während das letztere Integral zur Rechten in dem Vorhergehenden gefunden worden ist.

Höhere Zahlenlehre.

Achtes Kapitel.

Das Praktische bei dem Integriren der entwickelt gegebenen Differenzialien.

Vorerinnerung.

Die Praxis dieses Integrirens besteht meist darin, die im vorhergehenden Kapitel entwickelten 3 Integrations-Methoden mit einander geschickt in Verbindung zu setzen, um nicht bloß die Mittel zu haben, ein solches Integral wirklich finden zu können, sondern auch die Endresultate möglichst bequem, schnell und sicher zu erhalten. Hierüber soll die erste Abtheilung dieses Kapitels das Gewöhnliche mittheilen. — Weil aber dennoch, auch bei der geschicktesten Benutzung der vorhandenen Mittel, die Rechnungen für sehr wenig verwickelte Fälle, von ungemeinem Umfange werden, so ist es sehr zweckmäßig, sich für die häufiger vorkommenden einfachen Fälle, der Tabellen (Integral-Tafeln) zu bedienen, welche zu diesem Ende diesem vierten Theile beigegeben worden sind. Für den Anfänger sind nun in der zweiten Abtheilung dieses Kapitels einige Winke gegeben, wie solche Tafeln konstruirt werden können, jedoch nur in der Absicht, um dadurch die Uebung im Integriren zu befördern. Die nächstfolgende dritte Abtheilung enthält dann einige Worte über den Gebrauch dieser Tabellen, besonders in Beziehung auf die in ihnen vorkommenden bequemen Aggregat-Ausdrücke.

Erste Abtheilung.

Gewöhnliches praktisches Verfahren in den gewöhnlichen Fällen.

---

§. 180.

1) Kommt nämlich in einem zu integrirenden Differenzial der Ausdruck von der Form

$$a+bx+cx^2$$

vor, so kann man dafür schreiben

$$c\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}x+x^2\right) \quad \text{oder} \quad (-c)\left(\frac{a}{-c}+\frac{b}{-c}x-x^2\right);$$

und man wird das eine oder das andere thun, je nachdem c eine positive oder eine negative Zahl ist. Man hat es dann bloß mit einem Ausdruck zu thun von der Form

$$p+qx+x^2 \quad \text{oder} \quad p+qx-x^2.$$

2) Allein noch bequemer ist es, im Falle $a+bx\pm cx^2$ vorkommt, dafür zwar zuerst

$$c(p+qx\pm x^2)$$

zu setzen, aber dann statt $p+qx\pm x^2$, die Form

$$\alpha\pm z^2$$

zu nehmen, $x\pm\frac{1}{2}q = z$ setzend, wo dann für $x+\frac{1}{2}q = z$, $p+qx+x^2 = (p-\frac{1}{4}q^2)+z^2$ und für $x-\frac{1}{2}q = z$, $p+qx-x^2 = (p+\frac{1}{4}q^2)-z^2$ wird, während dabei allemal $dx = dz$ bleibt.

3) Ja, man kann auch sogleich in

$a+bx+cx^2$, $\quad x+\frac{b}{2c} = z \quad$ setzen

und man wird

$$dx = dz, \quad \text{aber} \quad a+bx+cx^2 = \frac{4ac-b^2}{4c}+cz^2$$

haben; während man

in $a+bx-cx^2$, $x-\frac{b}{2c}=z$ setzen würde, um

$$dx = dz, \quad \text{aber} \quad a+bx-cx^2 = \frac{4ac+b^2}{4c}-cz^2$$

zu erhalten.

§. 181.

Hat man aber die Form $a+bx\pm cx^2$ auf die einfachere Form $p\pm qz^2$ zurückgeführt, so kann man letztere leicht wieder auf die Form $1\pm v^2$ zurückführen. — Man schreibt nämlich bloß $p\pm qz^2 = p(1\pm\frac{q}{p}z^2)$ und setzt dann $\frac{q}{p}z^2 = v^2$ d. h. $z\cdot\sqrt{\frac{q}{p}} = v$, wodurch auch $dz = dv\cdot\sqrt{\frac{p}{q}}$ wird, und man hat $p\pm qz^2$ in $p(1\pm v^2)$ umgewandelt, so daß sich sonach der Ausdruck $a+bx\pm cx^2$ allemal auch auf den Ausdruck $1\pm v^2$ zurückführen läßt.

Wir wollen aber nun das (§§. 180. u. 181.) Gesagte in einigen Fällen der Praxis nachweisen.

1) Als z. B. im (§. 177. D.) $\int\frac{Px+Q}{(a+bx+cx^2)^n}\cdot dx$ zu finden war, konnte man $x+\frac{b}{2c}=z$ setzen, und hatte $dx=dz$, $a+bx+cx^2 = \frac{4ac-b^2}{4c}+cz^2 = p+cz^2$, wenn $\frac{4ac-b^2}{4c}=p$ gesetzt wird, und zuletzt ist dann

$$\int\frac{Px+Q}{(a+bx+cx^2)^n}\cdot dx = \int\frac{Pz+\left(Q-\frac{bP}{2c}\right)}{(p+cz^2)^n}\cdot dz$$

$$= P\int\frac{z\cdot dz}{(p+cz^2)^n}+\left(Q-\frac{bP}{2c}\right)\cdot\int\frac{dz}{(p+cz^2)^n}.$$

Von den beiden letztern Integralen integrirt sich nun das erstere $\int\frac{z\cdot dz}{(p+cz^2)^n}$ auf der Stelle, wenn man $p+cz^2=u$ setzt, weil dann $2cz\cdot dz = du$,

$= \frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ ist, zum Kosinus hat $\frac{2\sqrt{-c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{b^2-4ac}}$, und zur Tangente $\frac{-2cx-b}{2\sqrt{-c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}$, u. s. w. f., dasselbe Integral auch noch durch $\frac{1}{Cos}$ oder durch $\frac{1}{Tg}$ ausdrücken kann. *)

§. 182.

Für die Integration von

$$x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx,$$

wo m, n, positive oder negative ganze Zahlen, p dagegen eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl ist, **) veranstaltet die Praxis folgende Prozeduren.

---

*) Es ist $\frac{1}{Sin}v = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-v^2}+i\cdot v)$, also

$$\frac{1}{Sin}\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{1}{i}\cdot log\left(\frac{\sqrt{-4c(a+bx+cx^2)}-(2cx+b)i}{\sqrt{b^2-4ac}}\right),$$

also das eben gefundene Integral

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log\left(\frac{2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}+2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right),$$

welches mit dem (§. 179. E.) gefundenen übereinstimmt.

**) Sollte $\int x^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left(a+bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p\cdot dx$ gefunden werden, so setze man zuerst $x = z^{\beta\nu}$, hat dann $x^{\frac{\mu}{\nu}} = z^{\beta\mu}$, $x^{\frac{\alpha}{\beta}} = z^{\alpha\nu}$, $dx = \beta\nu\cdot z^{\beta\nu-1}\cdot dz$, und $\int x^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left(a+bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p\cdot dx = \beta\nu\int z^{\beta\mu+\beta\nu-1}\cdot(a+bz^{\alpha\nu})^p\cdot dz$ oder, wenn man $\beta\mu+\beta\nu = m$ und $\alpha\nu = n$ setzt

$$\int x^{\frac{\mu}{\nu}}\left(a+bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p\cdot dx = \beta\nu\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dz$$

wo m und n ganze Zahlen sind.

Eben so reduzirt sich auch

$$\int x^\alpha\cdot(ax^\beta+bx^\gamma)^p\cdot dx \text{ auf } \int x^{\alpha+\beta p}\cdot(a+bx^{\gamma-\beta})^p\cdot dx,$$

also nach dem eben Gesagten wiederum auf $\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx$, wo m und n ganze Zahlen sind, wenn auch p gebrochen seyn kann.

1) Ist p eine positive ganze Zahl, so kann man mittelst des binomischen Lehrsatzes das gegebene Differenzial in lauter integrirbare einzelne Glieder verwandeln.

2) Ist p eine negative ganze Zahl so hat man eine gebrochene Funktion, welche in ihre Parzial-Brüche zerlegt und dann integrirt werden kann. Weil aber diese Rechnung sehr mühsam werden dürfte, so wird man hier schon, besonders aber wenn

3) p eine gebrochene positive oder negative Zahl ist, vorher reduziren, d. h. das gesuchte Integral auf andere einfachere zurückführen *) und zwar wie folgt:

4) Da sich $x^{n-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx$ integriren läßt, sobald $a+bx^n = z$ gesetzt wird, so verwandelt man das gegebene Differenzial zuvor in $x^{m-n}\cdot x^{n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$ und integrirt theilweise, d. h. nach (§. 171. IV. oder V.), und man erhält

---

*) Man kann auch vorher, wenn p positiv oder negativ gebrochen und $=\frac{\mu}{\nu}$ seyn sollte, $a+bx^n = z^\nu$ setzen, hat dann

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = \frac{\nu}{bn}\int z^{\mu+\nu-1}\cdot\left(\frac{z^\nu-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1}\cdot dz,$$

welches letztere razional ist, so oft $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl.

Man kann aber auch zuvor $a+bx^n$ in $(ax^{-n}+b)x^n$, und somit $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ auf die Form $x^{m+\frac{n\mu}{\nu}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{\mu}{\nu}}$ verwandeln, aber $ax^{-n}+b = z^\nu$ setzen; und man erhält nun

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot dx = -\frac{\nu}{an}\int z^{\mu+\nu-1}\left(\frac{a}{z^\nu-b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1}\cdot dz,$$

welches letztere razional ist, so oft $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl wird.

Auf diesem Wege integriren sich sogleich

$$x^8\cdot(a+bx^3)^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot dx \text{ und } x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}\cdot dx,$$

u. dgl. m.

Anmerkung. Führen diese und alle ähnlichen Reduktionsformeln auf die Form $\frac{1}{0}$, so ist dies allemal ein Beweis, daß die Integrationen in diesen Fällen direkt gefunden werden müssen; und da die Differenzialien dann allemal zu einfachern Klassen gehören, so wird die direkte Behandlung dieser Fälle nie Schwierigkeiten in den Weg legen.

So wird z. B. einer der Nenner in (I.) zu Null, 1) wenn $b = 0$, und 2) wenn $pn + m = 0$. In beiden Fällen reduzirt sich die (I.), wenn man solche vorher mit $b(pn + m)$ wegmultiplizirt, auf

$$0 = x^{m-n}(a + bx^n)^{p+1} - a(m-n)\int x^{m-n-1}(a + bx^n)^p \cdot dx,$$

welche Gleichung für $b = 0$ in

$$1) \int x^{m-n-1} a^p \cdot dx = \frac{x^{m-n} \cdot a^{p+1}}{a(m-n)} = \frac{x^{m-n} \cdot a^p}{m-n}$$

übergeht; dagegen für $pn + m = 0$ d. h. für $p = -\frac{m}{n}$ in

$$2) \int x^{m-n-1}(a + bx^n)^{-\frac{m}{n}} \cdot dx = \frac{x^{m-n}(a + bx^n)^{-\frac{m}{n}+1}}{a(m-n)}.$$

Diese beiden Gleichungen sind nun nothwendig richtige, liefern aber nicht das verlangte Integral $\int x^{m-1}(a + bx^n)^p \cdot dx$, d. h. nicht

$$3) \int x^{m-1} \cdot a^p \cdot dx \quad \text{oder} \quad 4) \int x^{m-1}(a + bx^n)^{-\frac{m}{n}} \cdot dx;$$

so daß diese letztern beide direkt gefunden werden müssen. Wie sich (3.) findet, fällt in die Augen. Der Fall (4.) dagegen ist in der Note zu (N. 3. dieses §. 182.) bereits behandelt, weil

---

renzialien $\frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{dx}{x^m \cdot \sqrt{1-x^2}}$, $\frac{x^q \cdot dx}{\sqrt{2cx-x^2}}$, u. dgl. m. Auch geht $\frac{x^{2p} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ in die letztere über, wenn man $x^2 = \frac{x'}{2c}$ setzt.

jetzt $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{m}{n}$, also $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu} + 1 = 1$ wird. Dieser Fall wird also nach jener Behandlung auf die Integration einer razionalen Funktion zurückgeführt.

Die (II.) wenn $pn + m = 0$, also $p = -\frac{m}{n}$ wird, reduzirt sich, nachdem vorher mit $pn + m$ wegmultiplizirt ist, auf

$$0 = x^m (a + bx^n)^{-\frac{m}{n}} - ma \int x^{m-1} (a + bx^n)^{-\frac{m}{n}-1} \cdot dx,$$

welches ebenfalls eine richtige Gleichung, aber wiederum nicht das verlangte Integral liefert, so daß solches, wie kurz vorher beschrieben worden, direkt gefunden werden muß.

Die (III.) wird unbrauchbar, wenn $am = 0$, also 1) wenn $a = 0$, und 2) wenn $m = 0$ ist. In beiden Fällen reduzirt sie sich, wenn man mit am vorher wegmultiplizirt auf

$$0 = x^m (a + bx^n)^{p+1} - b(m + n + np) \int x^{m+n-1} (a + bx^n)^p \cdot dx,$$

für $a = 0$ oder für $m = 0$. Ist daher $a = 0$, so wird sie

$$5) \int x^{m+n-1} (bx^n)^p \cdot dx = \frac{x^m (bx^n)^{p+1}}{b(m + n + np)} = \frac{x^m \cdot b^p \cdot (x^n)^{p+1}}{m + n + np};$$

ist dagegen $m = 0$, so gibt sie

$$6) \int x^{n-1} (a + bx^n)^p \cdot dx = \frac{(a + bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)};$$

welche beide Gleichungen (5. u. 6.) richtige sind, aber nicht die verlangten Integrale, nämlich nicht

$$7) \int x^{m-1} (bx^n)^p \cdot dx \quad \text{und} \quad 8) \int x^{-1} (a + bx^n)^p \cdot dx$$

liefern, so daß diese letztern noch direkt behandelt werden müssen. — Die (7.) findet sich direkt augenblicklich. — Zerlegt man aber $(a + bx^n)^p$ in $(a + bx^n)^{p-1}$, so erhält man für die (8.) die Reduktionsformel

$$\int x^{-1} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx$$
$$= a \int x^{-1} (a + bx^n)^{p-1} \cdot dx + b \int x^{n-1} (a + bx^n)^{p-1} \cdot dx,$$

während letzteres $\int x^{n-1} (a + bx^n)^{p-1} \cdot dx = \frac{(a + bx^n)^p}{nbp}$ direkt

gefunden wird, $a+bx^n = z$ setzend, so daß dann

$$9)\ \int x^{-1}(a+bx^n)^p.dx = \frac{(a+bx^n)^p}{np} + a\int x^{-1}(a+bx^n)^{p-1}.dx,$$

oder auch, durch Umkehrung dieser Gleichung, und wenn man $p+1$ statt p setzt,

$$10)\ \int x^{-1}.(a+bx^n)^p.dx$$

$$= -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{1}{a}\int x^{-1}(a+bx^n)^{p+1}.dx$$

sich findet, von welchen Gleichungen die erste nur brauchbar ist, wenn p positiv, die andere dagegen, wenn p negativ seyn sollte. Diese beiden Gleichungen (9. u. 10.) stecken jedoch schon in der (II.) für $m = 0$.

Und ist p eine gebrochene Zahl $\frac{\mu}{\nu}$, so wird $\int x^{-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.dx$ auch razional, wenn $a+bx^n = z$ gesetzt wird.

Die (IV.) reduzirt sich, so oft $p+1$, oder n, oder a, $=0$ werden, auf

$$0 = -x^m.(a+bx^n)^{p+1} + (m+n+np)\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1}.dx;$$

welche Gleichung für $a = 0$, für $n = 0$ und für $p+1 = 0$, d. h. für $p = -1$ allemal richtig ist, aber nicht das Verlangte liefert.

Da die Fälle, wo $a = 0$ oder $n = 0$ ist, zu einfach sind, um Interesse zu gewähren, so betrachten wir bloß den Fall wo $p+1 = 0$, also $p = -1$ ist direkt, haben aber dann bloß

$$\int \frac{x^{m-1}}{a+bx^n}.dx$$

zu finden, so daß man sich dasmal, da m und n ganze Zahlen sind, zu der Integration der gebrochenen Funktionen zurückgeführt sieht. Von dorther wissen wir aber, daß wenn $m > n$ ist, zuerst $\frac{x^{m-1}}{a+bx^n}$

in eine ganze und in eine ächt gebrochene Funktion zerlegt werden muß, während letztere, oder wenn $m-1<n$ ist, diese Funktion $\frac{x^{m-1}}{a+bx^n}$ selbst, in einfache Parzial-Brüche zerlegt und dann letztere erst integrirt werden müssen, wie solches zu Anfange der nächsten Abtheilung, gerade für diesen Fall, ausgeführt sich findet.

§. 183.

Ganz auf ähnlichem Wege behandelt man die Integration von

$$x^m \cdot (a+bx+cx^2)^p \cdot dx,$$

wenn p nicht eine ganze positive Zahl ist, d. h. man sucht Reduktionsformeln auf, um solches auf einfachere und immer einfachere Integrale zurückzuführen. Wendet man zunächst die Formel

$$\int\left(\varphi\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)\cdot dx = \varphi\psi - \int\left(\psi\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot dx$$

oder $\int\varphi\cdot d\psi = \varphi\psi - \int\psi\cdot d\varphi$ darauf an, $\frac{d\psi}{dx} = x^m$ also $\psi_x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ setzend, so erhält man, wenn $a+bx+cx^2 = X$ genommen wird,

$$1)\int x^m \cdot X^p \cdot dx = \frac{x^{m+1}\cdot X^p}{m+1} - \frac{bp}{m+1}\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx$$
$$-\frac{2cp}{m+1}\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx,$$

weil $\int x^{m+1}\cdot(b+2cx)X^{p-1}\cdot dx$

in $b\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx + 2c\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx$

sich zerlegt, welches sogleich die Formel Tafel (XXXV. N. 3.) ist, während aus ihr auch (N. 6.) derselben Tafel hervorgeht, sobald $-m$ statt m gesetzt wird.

Und weil

$$X^p = X^{p-1}(a+bx+cx^2) = aX^{p-1} + bxX^{p-1} + cx^2\cdot X^{p-1}$$

ist, so wird auch noch

$$2)\int x^m \cdot X^p \cdot dx = a\int x^m\cdot X^{p-1}\cdot dx + b\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx$$
$$+c\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx.$$

Ferner ist $dX = (b + 2cx) \cdot dx$, folglich auch

$$3) \int x^m \cdot X^p \cdot dx = \frac{1}{2c} \int x^{m-1} X^p \cdot dX - \frac{b}{2c} \int x^{m-1} \cdot X^p \cdot dx,$$

während nach der Formel

$$\int \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) \cdot dx = \varphi\psi - \int \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx$$

$d\psi = X^{p+1} \cdot dX$, also $\psi = \frac{X^{p+1}}{p+1}$ setzend,

$$4) \int x^{m-1} \cdot X^p \cdot dX = \frac{x^{m-1} \cdot X^{p+1}}{p+1} - \frac{m-1}{p+1} \int X^{p+1} \cdot x^{m-2} \cdot dx$$

gefunden wird.

Durch verschiedene Kombinationen dieser 4 Gleichungen (NN. 1.—4.) bilden sich nun die übrigen Reduktionsformeln der Tafel (XXXV.). Namentlich ergibt sich, wenn man (4.) in (3.) substituirt, und dabei (2.) anwendet, in letzterer $p+1$ statt p setzend, in so ferne dann zur Linken schon $\int x^m \cdot X^p \cdot dx$ steht, zur Rechten aber noch einmal $-\frac{m-1}{2p+2} \int x^m \cdot X^p \cdot dx$ erscheint, welches mit dem zur Linken zu $\frac{m+2p-1}{2(p+1)} \int x^m \cdot X^p \cdot dx$ vereinigt werden kann, sogleich die (N. 4.), und aus dieser, $-p$ statt p setzend, die (N. 1.) der Tafel (XXXV.). — Setzt man in diese letzterwähnte (N. 1.) $-m+2$ statt m, so erhält man durch algebraische Auflösung (Umkehrung) der Gleichung die (N. 2.), und aus dieser, $-p$ statt p setzend, wiederum die (N. 8.) derselben Tafel (XXXV.). — Und hat man anfänglich sogleich, durch Anwendung der Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi,$$

$$\int x^m \cdot X^p \cdot dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{m+1} - \frac{p}{m+1} \int x^{m+1} \cdot X^{p-1}(b+2cx) \cdot dx$$

gefunden, so kann man in dieser Gleichung statt $x^{m+1} \cdot X^{p-1}(b+2cx)$ sogleich $2x^m \cdot X^p - 2ax^m \cdot X^{p-1} - bx^{m+1} \cdot X^{p-1}$ setzen, erhält dadurch auf der rechten Seite dasselbe zur Linken schon stehende und

gesuchte Integral, mit $\frac{-2p}{m+1}$ noch multiplizirt, kann solches mit dem links stehenden zu $\frac{m+2p+1}{m+1}\int x^m \cdot X^p \cdot dx$ vereinigen, und man erhält dann sogleich auch die (N. 5.) und aus dieser, $-m$ statt m setzend, noch die (N. 7.) der Tafel (XXXV.). — Die (N. 10.) derselben Tafel ergibt sich, wenn man zuerst nach der Formel

$$\int\varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int\psi \cdot d\varphi$$

$$\int X^p \cdot dx = X^p \cdot x - p\int X^{p-1}(bx+2cx^2) \cdot dx$$

findet, statt $X^{p-1}(bx+2cx^2)$ lieber $2X^p - X^{p-1}(2a+bx)$ setzt, zuletzt aber $X^{p-1} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2c}X^{p-1} \cdot dX - \frac{b}{2c}X^{p-1} \cdot dx$ nimmt. Und aus dieser (N. 10.) ergibt sich dann (N. 9.) derselben Tafel, wenn man $-p+1$ statt p setzt, und die Gleichung dann algebraisch auflöst (umkehrt). *) Diese Formeln der Tafel (XXXV.), besonders aber (NN. 9. u. 10. mehrmals hinter einander angewandt, geben dann die Reduktionsformeln der Tafeln (XXXVI., XXXIX. u. XXXXI.); während aus denselben die Reduktionsformeln der Tafel (XXXIII.) hervorgehen, wenn man in letzteren zuvor y statt x^n setzt, in jenen aber y statt x, und dabei für m das Zweckgemäße substituirt. Außerdem können diese Fälle der Tafel (XXXIII.) auch direkt eben so behandelt werden (mutatis mutandis), wie die Fälle der Tafel (XXXV.) so eben behandelt worden sind.

§. 184.

Ganz auf dieselbe Weise wird auch

$$\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx$$

*) Diese Formeln sind schon (§. 121. D.) auf andern Wegen behandelt zu finden. Auch konnte man hier zuerst $a+bx+cx^2$ in $\alpha+\beta z^2$ umwandeln, nach (§. 180.), und dadurch die bekannte Erleichterung sich verschaffen

behandelt, und man findet augenblicklich die Reduktionsformeln der Tafel (XXXIII.).

Man kann aber auch $x^n = z$ setzen, um

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \cdot dz, \quad x^{m-1} = z^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}$$

und

$$\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}-1} \cdot (a+bz+cz^2)^p \cdot dz$$

zu erhalten, und so diese Aufgabe unmittelbar in der des (§. 183.) behandelt zu sehen.

Man kann auch $x^n = u+\alpha$ setzen, hat dann $x = (u+\alpha)^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} \cdot (u+\alpha)^{\frac{1}{n}-1} \cdot du$ und indem man nachgehends α so bestimmt, daß $a+bx^n+cx^{2n}$ in die Form $A+Bu^2$ sich verwandelt, so reduzirt sich das gegebene Differenzial auf

$$\frac{1}{n} \cdot (u+\alpha)^{\frac{m}{n}-1}(A+Bu^2)^p \cdot du,$$

welche Umwandlung wenigstens dann Vortheile gewährt, so oft $\frac{m}{n}$ eine positive ganze Zahl ist.

Aber eben so kann man das oben gegebene Differenzial vorher in

$$x^{m+2pn-1} \cdot (a \cdot x^{-2n}+bx^{-n}+c)^p \cdot dx$$

verwandeln, und dann $x^{-n} = u+\alpha$ setzen, über α auf ähnliche Weise disponiren, und so das gesuchte Integral auf das von

$$-\frac{1}{n} \cdot (u+\alpha)^{-\frac{m}{n}-2p-1}(Cu^2+D)^p \cdot du \qquad \text{reduziren,}$$

welches wenigstens dann Vortheile gewährt, wenn $-\frac{m}{n}-2p-1$ eine positive ganze Zahl ist.

§. 185.

Und ähnliche Reduktionsformeln, könnte man sich verschaffen, wenn

$$x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+fx^{4n}+\ldots)^p\,dx$$

integrirt werden sollte. Wir begnügen uns hier einige derselben anzugeben.

Wird aber der Kürze wegen

$$a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n} \text{ durch } X$$

bezeichnet, so finden sich, auf ähnlichen Wegen, wie die in den frühern (§§.) bezeichneten, diese Reduktionsformeln:

$$\text{I. } \int x^{m-1}X^p.dx = \frac{x^m.X^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1}.dx$$
$$- \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}.dx - \frac{3pne}{m}\int x^{m+3n-1}X^{p-1}.dx;$$

$$\text{II. } \int x^{m-1}X^p.dx = \frac{x^{m-3n}X^{p+1}}{(m+3pn)e} - \frac{(m-3n)a}{(m+3pn)e}\int x^{m-3n-1}X^p.dx$$
$$- \frac{(m-2n+pn)b}{(m+3pn)e}\int x^{m-2n-1}X^p.dx$$
$$- \frac{(m-n+2pn)}{(m+3pn)e}\int x^{m-n-1}X^p.dx;$$

$$\text{III. } \int x^{m-1}X^p.dx = \frac{x^mX^p}{m+3pn} + \frac{3pna}{m+3pn}\int x^{m-1}X^{p-1}.dx$$
$$+ \frac{2pnb}{m+3pn}\int x^{m+n-1}X^{p-1}.dx$$
$$+ \frac{pnc}{m+3pn}\int x^{m+2n-1}X^{p-1}.dx;$$

$$\text{IV. } \int x^{m-1}X^p.dx = \frac{x^mX^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^p.dx$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}X^p.dx$$
$$- \frac{(m+3n+3pn)e}{ma}\int x^{m+3n-1}X^p.dx.$$

§. 186.

Um

$$\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$$

zu finden, pflegt man ebenfalls mit der Anwendung der Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi$$

zu beginnen, und zu dem Ende das gegebene Differenzial

$$Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$$

bald so: $\quad Cos\,x^{n-1} \cdot Sin\,x^m \cdot d(Sin\,x)$,

bald auch so: $\quad -Sin\,x^{m-1} \cdot Cos\,x^n \cdot d(Cos\,x)$,

zu schreiben und man erhält

$$\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1} Cos\,x^{n-1} \cdot Sin\,x^{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int Cos\,x^{n-2} \cdot Sin\,x^{m+2} \cdot dx$$

oder

$$= -\frac{1}{n+1} Sin\,x^{m-1} \cdot Cos\,x^{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int Sin\,x^{m-2} \cdot Cos\,x^{n+2} \cdot dx,$$

welches die Resultate (I. u. II.) der Tafel (XXXXIII.) sind.

Setzt man nun in diesen Gleichungen

$$Sin\,x^{m+2} = Sin\,x^m(1 - Cos\,x^2) = Sin\,x^m - Sin\,x^m \cdot Cos\,x^2$$

oder

$$Cos\,x^{n+2} = Cos\,x^n(1 - Sin\,x^2) = Cos\,x^n - Cos\,x^n \cdot Sin\,x^2,$$

so ergeben sich (III. u. IV.) derselben Tafel. Und setzt man in (III.) $m+2$ statt m, oder in (IV.) $n+2$ statt n, so ergeben sich durch algebraische Auflösung (durch Umkehrung) die Formeln (V. u. VI.) derselben Tafel.

Und sind m und n positive oder negative ganze Zahlen, so kann man durch wiederholte Anwendung dieser Formeln andere Formeln in Form von endlichen Reihen erhalten, durch welche dieses Integral $\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$ sogleich auf 1) $\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x \cdot dx$ oder auf 2) $\int Sin\,x^m \cdot dx$ oder auf 3) $\int Cos\,x^n \cdot Sin\,x \cdot dx$ oder

auf 4) $\int Cos\, x^n \cdot dx$ zurückgeführt wird. Bedenkt man dann, daß $Cos\, x \cdot dx = d(Sin\, x)$ und $Sin\, x \cdot dx = -d(Cos\, x)$ ist, so findet sich augenblicklich

$$\int Sin\, x^m \cdot Cos\, x\, dx = \frac{Sin\, x^{m+1}}{m+1}$$

und

$$\int Cos\, x^n \cdot Sin\, x\, dx = -\frac{Cos\, x^{n+1}}{n+1}.$$

Die anderen Integrale $\int Sin\, x^m \cdot dx$ und $\int Cos\, x^n \cdot dx$ kann man in algebraische verwandeln, wenn man $Sin\, x = z$ oder $Cos\, x = z$ setzt. — Sind aber m und n ganze positive Zahlen, so lassen sich dieselbe Integrale auch finden, wenn man $Sin\, x^m$ und $Cos\, x^n$ in endliche Reihen verwandelt, die nach Sinus oder Kosinus von vielfachen Bogen fortlaufen, und dann die einzelnen Glieder von der Form

$$Sin\, px \cdot dx \quad \text{oder} \quad Cos\, px \cdot dx$$

integrirt, indem man $px = z$ setzt, dann $dx = \frac{1}{p} \cdot dz$ hat, so wie

$$\int Sin\, px \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \int Sin\, z \cdot dz = -\frac{1}{p} \cdot Cos\, z = -\frac{1}{p} \cdot Cos\, px,$$

$$\int Cos\, px \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \int Cos\, z \cdot dz = \frac{1}{p} \cdot Sin\, z = \frac{1}{p} \cdot Sin\, px$$

erhält. *)

---

*) Wir wollen für den Anfänger die ganze Rechnung hersetzen, uns jedoch dabei der Aggregate bedienen, für welche der erste Anfänger zunächst die Reihen selbst setzen oder gesetzt denken mag.

Es ist nämlich

$$Sin\, x = \frac{e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i}}{2i}, \text{ also } Sin\, x^m = \frac{1}{2^m i^m}(e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i})^m,$$

während nach dem binomischen Lehrsatze

$$(e^{x \cdot i} - e^{-x \cdot i})^m = \underset{a+b=m}{S}\left[m_a \cdot (e^{x \cdot i})^a \cdot (-1)^b \cdot (e^{-x \cdot i})\right]$$

$$= \underset{a+b=m}{S}\left[m_a \cdot (-1)^b e^{(a-b)x \cdot i}\right] \text{ ist.}$$

also $\int \frac{z \cdot dz}{(p+cz^2)^n} = \frac{1}{2c} \cdot \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{(-n+1)u^{n-1}}$

$$= -\frac{1}{2(n-1)c(p+cz^2)^{n-1}}$$

wird. Das gegebene Integral ist daher jetzt auf das viel einfachere $\int \frac{A \cdot dz}{(p+cz^2)^n}$ zurückgeführt, auf welches man nun zwar dieselbe Behandlung des (§. 177. D.) anwendet, welches aber bei weitem weniger mühsame Rechnungen erfordert. Man setzt nämlich jetzt bloß

$$\int \frac{A \cdot dz}{(p+cz^2)^n} = \frac{Bz}{(p+cz^2)^{n-1}} + \int \frac{A_1 \cdot dz}{(p+cz^2)^{n-1}},$$

differenzirt und findet $B = \frac{A}{2n-2}$ und $A_1 = \frac{(2n-3)A}{2n-2}$. Auf dieselbe Weise hat man dann, $n-1$ statt n setzend,

$$\int \frac{A_1 \cdot dz}{(p+cz^2)^{n-1}} = \frac{B_1 \cdot z}{(p+cz^2)^{n-2}} + \int \frac{A_2 \cdot dz}{(p+cz^2)^{n-2}}$$

wo $B_1 = \frac{A_1}{2n-4}$ und $A_2 = \frac{(2n-5)A_1}{2n-4}$ ist. U. s. w. f.

Kommt man aber zuletzt auf das Integral

$$\int \frac{A_{n-1} \cdot dz}{p+cz^2},$$

so kann man $p+cz^2 = p\left(1+\frac{c}{p}z^2\right) = p(1+v^2)$ setzen, hat $\frac{c}{p}z^2 = v^2$, $z = v \cdot \sqrt{\frac{p}{c}}$, $dz = dv \cdot \sqrt{\frac{p}{c}}$,

also $$\int \frac{A_{n-1} \cdot dz}{p+cz^2} = \sqrt{\frac{p}{c}} \cdot \frac{A_{n-1}}{p} \cdot \int \frac{dv}{1+v^2},$$

während man in der Regel aus der Differenzial-Rechnung sich noch erinnert, daß $\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{Tg} v$ ist. — Wäre jedoch c negativ, also $-c$ positiv, so würde man lieber $-\frac{c}{p}z^2 = v^2$, also $z = v\sqrt{-\frac{p}{c}}$ setzen, und erhielte dann

$$\int \frac{A_{n-1} \cdot dz}{p+cz^2} = \sqrt{\frac{p}{-c}} \cdot \frac{A_{n-1}}{p} \cdot \int \frac{dv}{1-v^2},$$

während $\frac{1}{1-v^2} = \frac{\frac{1}{2}}{v-1} - \frac{\frac{1}{2}}{v+1}$ ist, so daß man

$$\int \frac{dv}{1-v^2} = \tfrac{1}{2} \log(v-1) - \tfrac{1}{2} \log(v+1) = \tfrac{1}{2} \log \frac{v-1}{v+1} = \log \sqrt{\left(\frac{v-1}{v+1}\right)}$$

hat.

Dieser letztere Weg ist aber derselbe, der in (§. 177. F.) betreten worden ist, der hier jedoch wegen der eingeführten neuen Veränderlichen weniger weitläufige Rechnungen erfordert. Das Verfahren (E. §. 177.) fiel hier ganz weg.

2) Als (§. 179. E.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ gefunden werden sollte, da konnte zunächst $\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{p+qx+x^2}}$ dafür gesetzt werden, wenn $\frac{a}{c} = p$ und $\frac{b}{c} = q$ genommen wird, und jene Arbeiten würden sich dadurch bereits etwas vereinfacht haben, weil man jetzt nur $\sqrt{p+qx+x^2} = z+x$ zu setzen gehabt hätte, um $\frac{dx}{\sqrt{p+qx+x^2}}$ in ein razionales Differenzial zu verwandeln.

Setzte man aber lieber $x + \frac{b}{2c} = z$, so würde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{p+cz^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{q+z^2}},$$

wenn $\frac{p}{c} = \frac{4ac-b^2}{4c} = q$ gesetzt wird; — welches Differenzial man nun razional macht, sobald $\sqrt{q+z^2} = v+z$ gesetzt wird.

Wäre aber der Koeffizient c von x^2 negativ, mithin $-c$ positiv, so würde man lieber finden

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{p+cz^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}},$$

sobald $x + \frac{b}{2c} = z$, $\frac{4ac-b^2}{4c} = p$, und $z\sqrt{\frac{-c}{p}} = \frac{-2cz}{\sqrt{b^2-4ac}} = v$ gesetzt wird, woraus dann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \overset{1}{Sin}\, v = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \overset{1}{Sin} \frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

hervorgeht. Wenn man daher (§. 179. E.) bereits 3 Formen für $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ gefunden hat, so ist die jetzige Form als eine vierte anzusehen, während man, weil der Bogen, dessen Sinus

$= \frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$ ist, zum Kosinus hat $\frac{2\sqrt{-c} \cdot \sqrt{a + bx + cx^2}}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$, und zur Tangente $\frac{-2cx - b}{2\sqrt{-c} \cdot \sqrt{a + bx + cx^2}}$, u. s. w. f., dasselbe Integral auch noch durch $\frac{1}{Cos}$ oder durch $\frac{1}{Tg}$ ausdrücken kann. *)

§. 182.

Für die Integration von

$$x^{m-1} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx,$$

wo m, n, positive oder negative ganze Zahlen, p dagegen eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl ist, **) veranstaltet die Praxis folgende Prozeduren.

---

*) Es ist $\frac{1}{Sin} v = \frac{1}{i} \cdot log(\sqrt{1 - v^2} + i \cdot v)$, also

$$\frac{1}{Sin} \frac{-2cx - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} = \frac{1}{i} \cdot log\left(\frac{\sqrt{-4c(a + bx + cx^2)} - (2cx + b)i}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right),$$

also das eben gefundene Integral

$$= \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot log\left(\frac{2\sqrt{c} \cdot \sqrt{a + bx + cx^2} + 2cx + b}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right),$$

welches mit dem (§. 179. E.) gefundenen übereinstimmt.

**) Sollte $\int x^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \left(a + bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p \cdot dx$ gefunden werden, so setze man zuerst $x = z^{\beta\nu}$, hat dann $x^{\frac{\mu}{\nu}} = z^{\beta\mu}$, $x^{\frac{\alpha}{\beta}} = z^{\alpha\nu}$, $dx = \beta\nu \cdot z^{\beta\nu - 1} \cdot dz$, und $\int x^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \left(a + bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p \cdot dx = \beta\nu \int z^{\beta\mu + \beta\nu - 1} \cdot (a + bz^{\alpha\nu})^p \cdot dz$ oder, wenn man $\beta\mu + \beta\nu = m$ und $\alpha\nu = n$ setzt

$$\int x^{\frac{\mu}{\nu}} \left(a + bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p \cdot dx = \beta\nu \int x^{m-1} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dz$$

wo m und n ganze Zahlen sind.

Eben so reduzirt sich auch

$$\int x^\alpha \cdot (ax^\beta + bx^\gamma)^p \cdot dx \text{ auf } \int x^{\alpha + \beta p} \cdot (a + bx^{\gamma - \beta})^p \cdot dx,$$

also nach dem eben Gesagten wiederum auf $\int x^{m-1} \cdot (a + bx^n)^p \cdot dx$, wo m und n ganze Zahlen sind, wenn auch p gebrochen seyn kann.

1) Ist p eine positive ganze Zahl, so kann man mittelst des binomischen Lehrsatzes das gegebene Differenzial in lauter integrirbare einzelne Glieder verwandeln.

2) Ist p eine negative ganze Zahl so hat man eine gebrochene Funktion, welche in ihre Parzial-Brüche zerlegt und dann integrirt werden kann. Weil aber diese Rechnung sehr mühsam werden dürfte, so wird man hier schon, besonders aber wenn

3) p eine gebrochene positive oder negative Zahl ist, vorher reduziren, d. h. das gesuchte Integral auf andere einfachere zurückführen *) und zwar wie folgt:

4) Da sich $x^{n-1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$ integriren läßt, sobald $a+bx^n = z$ gesetzt wird, so verwandelt man das gegebene Differenzial zuvor in $x^{m-n} \cdot x^{n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$ und integrirt theilweise, d. h. nach (§. 171. IV. oder V.), und man erhält

---

*) Man kann auch vorher, wenn p positiv oder negativ gebrochen und $= \frac{\mu}{\nu}$ seyn sollte, $a+bx^n = z^\nu$ setzen, hat dann

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = \frac{\nu}{bn}\int z^{\mu+\nu-1} \cdot \left(\frac{z^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} \cdot dz,$$

welches letztere razional ist, so oft $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl.

Man kann aber auch zuvor $a+bx^n$ in $(ax^{-n}+b)x^n$, und somit $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ auf die Form $x^{m+\frac{n\mu}{\nu}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{\mu}{\nu}}$ verwandeln, aber $ax^{-n}+b = z^\nu$ setzen; und man erhält nun

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot dx = -\frac{\nu}{an}\int z^{\mu+\nu-1}\left(\frac{a}{z^\nu - b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1} \cdot dz,$$

welches letztere razional ist, so oft $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl wird.

Auf diesem Wege integriren sich sogleich

$$x^8 \cdot (a+bx^3)^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot dx \text{ und } x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}} \cdot dx,$$

u. dgl. m.

$$(\text{♁})\cdots\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb}$$
$$-\frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\cdot dx.$$

Nun ist aber

$$(a+bx^n)^{p+1} = (a+bx^n)^p\cdot(a+bx^n),$$

also

$$(\text{☾})\cdots\; x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}$$
$$= ax^{m-n-1}(a+bx^n)^p + bx^{m-1}(a+bx^n)^p.$$

Dadurch zerfällt das letztere Integral zur Rechten in (♁), sogleich in zwei andere, und in der entstehenden Gleichung kommt ein und dasselbe Integral zweimal vor; und diese Gleichung selbst, löst man sie nach diesem letztern Integral (algebraisch) auf, gibt

$$\text{I. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$$
$$= \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(pn+m)} - \frac{a(m-n)}{b(pn+m)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx.$$

Setzt man hier nach und nach $m-n$, $m-2n$, $m-3n$, rc. statt m, so erhält man neue Reduktionen, so daß man das gesuchte Integral auf $\int x^{m-rn-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$ reduzirt sieht, wo r positiv ganz aber so genommen werden kann, daß $m-rn-1$ der kleinstmöglichste Exponent werde.

Setzt man in (I.) $m+n$ statt m und $p-1$ statt p und substituirt das zu erhaltende in die nach (☾) gebildete Gleichung

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$$
$$= a\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\cdot dx + b\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx,$$

so erhält man

$$\text{II. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$$
$$= \frac{x^m(a+bx^n)^p}{pn+m} + \frac{pna}{pn+m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\cdot dx,$$

durch welche Reduktionsformel nach und nach, $p-1$, $p-2$, $p-3$, ... $p-r$ statt p setzend, das gesuchte Integral auf

$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-r} \cdot dx$ zurückgeführt werden kann, wo r positiv ganz, aber so genommen werden kann, daß $p-r$ der kleinst-möglichste Exponent werde. *)

Sind dagegen m oder p negativ, so erreichen die Formeln (I. u. II.) ihren Zweck nicht, weil das Integral zur Rechten dieser Gleichungen dann das zusammengesetztere wird. Aber eben deshalb kann man die Gleichungen (I. u. II.) nun nach dem zusammengesetzteren Integral (algebraisch) auflösen, und man bekommt dann, in (I.) $m+n$ statt m, in (II.) dagegen $p+1$ statt p setzend, die neuen, für diesen Fall zweckmäßigen Reduktionsformeln, nämlich:

$$\text{III. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{am} - \frac{b(m+n+np)}{am}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx,$$

$$\text{IV. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1} \cdot dx. \text{ **)}$$

---

*) Durch (I.) sieht man z. B. $\int x^7 \cdot (a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$ auf die Integration von $x^4 \cdot (a+bx^3)^{\frac{5}{2}} \cdot dx$, und diese wieder auf die Integration von $x \cdot (a+bx^3)^{\frac{5}{2}} \cdot dx$ zurückgeführt, während letzteres Integral nach (II.) auf $\int x \cdot (a+bx^3)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$, dieses wieder nach (II.) auf $\int x \cdot (a+bx^3)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$, und nach derselben (II.) das letztere auch noch auf $\int \frac{x}{(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot dx$ zurückgeführt werden kann.

**) Unter den 54 hinten beigegebenen Tafeln findet man in der Taf. (IV.) diese Reduktionen fortgesetzt und auch die Endresultate (in Form von endlichen Reihen, deren Glieder daselbst durch ein einziges allgemeines Glied vorgestellt sind). Nur ist in der dortigen (III) m das, was hier in (III.) $-m$ genannt worden ist; während in der dortigen (IV.) p das ist, was hier in (VI.) durch $-p$ vorgestellt wird.

Mittelst dieser Formeln finden sich namentlich integrirt die Diffe-

also $\int \frac{z \cdot dz}{(p+cz^2)^n} = \frac{1}{2c} \cdot \int \frac{du}{u^n} = \frac{1}{2c} \cdot \frac{1}{(-n+1)u^{n-1}}$

$$= -\frac{1}{2(n-1)c(p+cz^2)^{n-1}}$$

wird. Das gegebene Integral ist daher jetzt auf das viel einfachere $\int \frac{A \cdot dz}{(p+cz^2)^n}$ zurückgeführt, auf welches man nun zwar dieselbe Behandlung des (§. 177. D.) anwendet, welches aber bei weitem weniger mühsame Rechnungen erfordert. Man setzt nämlich jetzt bloß

$$\int \frac{A \cdot dz}{(p+cz^2)^n} = \frac{Bz}{(p+cz^2)^{n-1}} + \int \frac{A_1 \cdot dz}{(p+cz^2)^{n-1}},$$

differenzirt und findet $B = \frac{A}{2n-2}$ und $A_1 = \frac{(2n-3)A}{2n-2}$. Auf dieselbe Weise hat man dann, $n-1$ statt n setzend,

$$\int \frac{A_1 \cdot dz}{(p+cz^2)^{n-1}} = \frac{B_1 \cdot z}{(p+cz^2)^{n-2}} + \int \frac{A_2 \cdot dz}{(p+cz^2)^{n-2}}$$

wo $B_1 = \frac{A_1}{2n-4}$ und $A_2 = \frac{(2n-5)A_1}{2n-4}$ ist. U. s. w. f.

Kommt man aber zuletzt auf das Integral

$$\int \frac{A_{n-1} \cdot dz}{p+cz^2},$$

so kann man $p+cz^2 = p\left(1+\frac{c}{p}z^2\right) = p(1+v^2)$ setzen, hat

$\frac{c}{p}z^2 = v^2$, $z = v \cdot \sqrt{\frac{p}{c}}$, $dz = dv \cdot \sqrt{\frac{p}{c}}$,

also $\int \frac{A_{n-1} \cdot dz}{p+cz^2} = \sqrt{\frac{p}{c}} \cdot \frac{A_{n-1}}{p} \cdot \int \frac{dv}{1+v^2}$,

während man in der Regel aus der Differenzial-Rechnung sich noch erinnert, daß $\int \frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{Tg} v$ ist. — Wäre jedoch c negativ, also $-c$ positiv, so würde man lieber $-\frac{c}{p}z^2 = v^2$, also $z = v\sqrt{-\frac{p}{c}}$ setzen, und erhielte dann

$$\int \frac{A_{n-1} \cdot dz}{p+cz^2} = \sqrt{\frac{p}{-c}} \cdot \frac{A_{n-1}}{p} \cdot \int \frac{dv}{1-v^2},$$

während $\frac{1}{1-v^2} = \frac{\frac{1}{2}}{v-1} - \frac{\frac{1}{2}}{v+1}$ ist, so daß man

$$\int \frac{dv}{1-v^2} = \tfrac{1}{2} \log (v-1) - \tfrac{1}{2} \log (v+1) = \tfrac{1}{2} \log \frac{v-1}{v+1} = \log \sqrt{\left(\frac{v-1}{v+1}\right)}$$

hat.

Dieser letztere Weg ist aber derselbe, der in (§. 177. F.) betreten worden ist, der hier jedoch wegen der eingeführten neuen Veränderlichen weniger weitläufige Rechnungen erfordert. Das Verfahren (E. §. 177.) fiel hier ganz weg.

2) Als (§. 179. E.) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ gefunden werden sollte, da konnte zunächst $\frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dx}{\sqrt{p+qx+x^2}}$ dafür gesetzt werden, wenn $\frac{a}{c} = p$ und $\frac{b}{c} = q$ genommen wird, und jene Arbeiten würden sich dadurch bereits etwas vereinfacht haben, weil man jetzt nur $\sqrt{p+qx+x^2} = z+x$ zu setzen gehabt hätte, um $\frac{dx}{\sqrt{p+qx+x^2}}$ in ein razionales Differenzial zu verwandeln.

Setzte man aber lieber $x + \frac{b}{2c} = z$, so würde

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{p+cz^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \int \frac{dz}{\sqrt{q+z^2}},$$

wenn $\frac{p}{c} = \frac{4ac-b^2}{4c} = q$ gesetzt wird; — welches Differenzial man nun razional macht, sobald $\sqrt{q+z^2} = v+z$ gesetzt wird.

Wäre aber der Koeffizient c von x^2 negativ, mithin $-c$ positiv, so würde man lieber finden

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \int \frac{dz}{\sqrt{p+cz^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}},$$

sobald $x + \frac{b}{2c} = z$, $\frac{4ac-b^2}{4c} = p$, und $z\sqrt{\frac{-c}{p}} = \frac{-2cz}{\sqrt{b^2-4ac}} = v$ gesetzt wird, woraus dann

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \overset{1}{Sin}\, v = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cdot \overset{1}{Sin} \frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

hervorgeht. Wenn man daher (§. 179. E.) bereits 3 Formen für $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ gefunden hat, so ist die jetzige Form als eine vierte anzusehen, während man, weil der Bogen, dessen Sinus

$= \frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}$ ist, zum Kosinus hat $\frac{2\sqrt{-c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}{\sqrt{b^2-4ac}}$, und zur Tangente $\frac{-2cx-b}{2\sqrt{-c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}$, u. s. w. f., dasselbe Integral auch noch durch $\frac{1}{Cos}$ oder durch $\frac{1}{Tg}$ ausdrücken kann. *)

§. 182.

Für die Integration von

$$x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx,$$

wo m, n, positive oder negative ganze Zahlen, p dagegen eine positive oder negative ganze oder gebrochene Zahl ist, **) veranstaltet die Praxis folgende Prozeduren.

---

*) Es ist $\frac{1}{Sin}v = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-v^2}+i\cdot v)$, also

$$\frac{1}{Sin}\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}} = \frac{1}{i}\cdot log\left(\frac{\sqrt{-4c(a+bx+cx^2)}-(2cx+b)i}{\sqrt{b^2-4ac}}\right),$$

also das eben gefundene Integral

$$= \frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log\left(\frac{2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}+2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right),$$

welches mit dem (§. 179. E.) gefundenen übereinstimmt.

**) Sollte $\int x^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left(a+bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p\cdot dx$ gefunden werden, so setze man zuerst $x = z^{\beta\nu}$, hat dann $x^{\frac{\mu}{\nu}} = z^{\beta\mu}$, $x^{\frac{\alpha}{\beta}} = z^{\alpha\nu}$, $dx = \beta\nu\cdot z^{\beta\nu-1}\cdot dz$, und $\int x^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\left(a+bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p\cdot dx = \beta\nu\int z^{\beta\mu+\beta\nu-1}\cdot(a+bz^{\alpha\nu})^p\cdot dz$ oder, wenn man $\beta\mu+\beta\nu = m$ und $\alpha\nu = n$ setzt

$$\int x^{\frac{\mu}{\nu}}\left(a+bx^{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^p\cdot dx = \beta\nu\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dz$$

wo m und n ganze Zahlen sind.

Eben so reduzirt sich auch

$$\int x^{\alpha}\cdot(ax^{\beta}+bx^{\gamma})^p\cdot dx \text{ auf } \int x^{\alpha+\beta p}\cdot(a+bx^{\gamma-\beta})^p\cdot dx,$$

also nach dem eben Gesagten wiederum auf $\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx$, wo m und n ganze Zahlen sind, wenn auch p gebrochen seyn kann.

1) Ist p eine positive ganze Zahl, so kann man mittelst des binomischen Lehrsatzes das gegebene Differenzial in lauter integrirbare einzelne Glieder verwandeln.

2) Ist p eine negative ganze Zahl so hat man eine gebrochene Funktion, welche in ihre Parzial-Brüche zerlegt und dann integrirt werden kann. Weil aber diese Rechnung sehr mühsam werden dürfte, so wird man hier schon, besonders aber wenn

3) p eine gebrochene positive oder negative Zahl ist, vorher reduziren, d. h. das gesuchte Integral auf andere einfachere zurückführen *) und zwar wie folgt:

4) Da sich $x^{n-1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$ integriren läßt, sobald $a+bx^n = z$ gesetzt wird, so verwandelt man das gegebene Differenzial zuvor in $x^{m-n} \cdot x^{n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$ und integrirt theilweise, d. h. nach (§. 171. IV. oder V.), und man erhält

---

*) Man kann auch vorher, wenn p positiv oder negativ gebrochen und $= \frac{\mu}{\nu}$ seyn sollte, $a+bx^n = z^\nu$ setzen, hat dann

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = \frac{\nu}{bn} \int z^{\mu+\nu-1} \cdot \left(\frac{z^\nu - a}{b}\right)^{\frac{m}{n}-1} \cdot dz,$$

welches letztere razional ist, so oft $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl.

Man kann aber auch zuvor $a+bx^n$ in $(ax^{-n}+b)x^n$, und somit $x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$ auf die Form $x^{m+\frac{n\mu}{\nu}-1}(ax^{-n}+b)^{\frac{\mu}{\nu}}$ verwandeln, aber $ax^{-n}+b = z^\nu$ setzen; und man erhält nun

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot dx = -\frac{\nu}{an} \int z^{\mu+\nu-1}\left(\frac{a}{z^\nu - b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}+1} \cdot dz,$$

welches letztere razional ist, so oft $\frac{m}{n}+\frac{\mu}{\nu}$ eine ganze Zahl wird.

Auf diesem Wege integriren sich sogleich

$$x^8 \cdot (a+bx^3)^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot dx \text{ und } x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}} \cdot dx,$$

u. dgl. m.

$$(\text{♁})\cdots\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1}\cdot dx.$$

Nun ist aber

$$(a+bx^n)^{p+1} = (a+bx^n)^p\cdot(a+bx^n),$$

also

$$(\text{☾})\cdots x^{m-n-1}(a+bx^n)^{p+1} = ax^{m-n-1}(a+bx^n)^p + bx^{m-1}(a+bx^n)^p.$$

Dadurch zerfällt das letztere Integral zur Rechten in (♁), sogleich in zwei andere, und in der entstehenden Gleichung kommt ein und dasselbe Integral zweimal vor; und diese Gleichung selbst, löst man sie nach diesem letztern Integral (algebraisch) auf, gibt

$$\text{I. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}}{b(pn+m)} - \frac{a(m-n)}{b(pn+m)}\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx.$$

Setzt man hier nach und nach $m-n$, $m-2n$, $m-3n$, ꝛc. statt m, so erhält man neue Reduktionen, so daß man das gesuchte Integral auf $\int x^{m-rn-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$ reduzirt sieht, wo r positiv ganz aber so genommen werden kann, daß $m-rn-1$ der kleinstmöglichste Exponent werde.

Setzt man in (I.) $m+n$ statt m und $p-1$ statt p und substituirt das zu erhaltende in die nach (☾) gebildete Gleichung

$$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = a\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\cdot dx + b\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx,$$

so erhält man

$$\text{II. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = \frac{x^m(a+bx^n)^p}{pn+m} + \frac{pna}{pn+m}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-1}\cdot dx,$$

durch welche Reduktionsformel nach und nach, $p-1$, $p-2$, $p-3$, $\cdots$ $p-r$ statt p setzend, das gesuchte Integral auf

$\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-r} \cdot dx$ zurückgeführt werden kann, wo r positiv ganz, aber so genommen werden kann, daß p — r der kleinst-möglichste Exponent werde. *)

Sind dagegen m oder p negativ, so erreichen die Formeln (I. u. II.) ihren Zweck nicht, weil das Integral zur Rechten dieser Gleichungen dann das zusammengesetztere wird. Aber eben deshalb kann man die Gleichungen (I. u. II.) nun nach dem zusammengesetzteren Integral (algebraisch) auflösen, und man bekommt dann, in (I.) m + n statt m, in (II.) dagegen p + 1 statt p setzend, die neuen, für diesen Fall zweckmäßigen Reduktionsformeln, nämlich:

$$\text{III. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = \frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{am} - \frac{b(m+n+np)}{am}\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx,$$

$$\text{IV. } \int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = -\frac{x^m(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na}\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1} \cdot dx. \text{ **)}$$

---

*) Durch (I.) sieht man z. B. $\int x^7 \cdot (a+bx^3)^{\frac{5}{2}}$ auf die Integration von $x^4 \cdot (a+bx^3)^{\frac{5}{2}} \cdot dx$, und diese wieder auf die Integration von $x \cdot (a+bx^3)^{\frac{5}{2}} \cdot dx$ zurückgeführt, während letzteres Integral nach (II.) auf $\int x \cdot (a+bx^3)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$, dieses wieder nach (II.) auf $\int x \cdot (a+bx^3)^{\frac{1}{2}} \cdot dx$, und nach derselben (II.) das letztere auch noch auf $\int \frac{x}{(a+bx^3)^{\frac{1}{2}}} \cdot dx$ zurückgeführt werden kann.

**) Unter den 54 hinten beigegebenen Tafeln findet man in der Taf. (IV.) diese Reduktionen fortgesetzt und auch die Endresultate (in Form von endlichen Reihen, deren Glieder daselbst durch ein einziges allgemeines Glied vorgestellt sind). Nur ist in der dortigen (III) m das, was hier in (III.) —m genannt worden ist; während in der dortigen (IV.) p das ist, was hier in (VI.) durch —p vorgestellt wird.

Mittelst dieser Formeln finden sich namentlich integrirt die Diffe-

Anmerkung. Führen diese und alle ähnlichen Reduktionsformeln auf die Form $\frac{1}{0}$, so ist dies allemal ein Beweis, daß die Integrationen in diesen Fällen direkt gefunden werden müssen; und da die Differenzialien dann allemal zu einfachern Klassen gehören, so wird die direkte Behandlung dieser Fälle nie Schwierigkeiten in den Weg legen.

So wird z. B. einer der Nenner in (I.) zu Null, 1) wenn $b = 0$, und 2) wenn $pn + m = 0$. In beiden Fällen reduzirt sich die (I.), wenn man solche vorher mit $b(pn+m)$ wegmultiplizirt, auf

$$0 = x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} - a(m-n)\int x^{m-n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx,$$

welche Gleichung für $b = 0$ in

$$1) \int x^{m-n-1}a^p \cdot dx = \frac{x^{m-n} \cdot a^{p+1}}{a(m-n)} = \frac{x^{m-n} \cdot a^p}{m-n}$$

übergeht; dagegen für $pn + m = 0$ d. h. für $p = -\frac{m}{n}$ in

$$2) \int x^{m-n-1}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}} \cdot dx = \frac{x^{m-n}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}+1}}{a(m-n)}.$$

Diese beiden Gleichungen sind nun nothwendig richtige, liefern aber nicht das verlangte Integral $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$, d. h. nicht

$$3) \int x^{m-1} \cdot a^p \cdot dx \quad \text{oder} \quad 4) \int x^{m-1}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}} \cdot dx;$$

so daß diese letztern beide direkt gefunden werden müssen. Wie sich (3.) findet, fällt in die Augen. Der Fall (4.) dagegen ist in der Note zu (N. 3. dieses §. 182.) bereits behandelt, weil

---

renzialien $\frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{dx}{x^m \cdot \sqrt{1-x^2}}$, $\frac{x^q \cdot dx}{\sqrt{2cx-x^2}}$, u. dgl. m. Auch geht $\frac{x^{2p} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ in die letztere über, wenn man $x^2 = \frac{x'}{2c}$ setzt.

jetzt $\frac{\mu}{\nu} = -\frac{m}{n}$, also $\frac{m}{n} + \frac{\mu}{\nu} + 1 = 1$ wird. Dieser Fall wird also nach jener Behandlung auf die Integration einer razionalen Funktion zurückgeführt.

Die (II.) wenn $pn + m = 0$, also $p = -\frac{m}{n}$ wird, reduzirt sich, nachdem vorher mit $pn + m$ wegmultiplizirt ist, auf

$$0 = x^m(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}} - ma\int x^{m-1}(a+bx^n)^{-\frac{m}{n}-1} \cdot dx,$$

welches ebenfalls eine richtige Gleichung, aber wiederum nicht das verlangte Integral liefert, so daß solches, wie kurz vorher beschrieben worden, direkt gefunden werden muß.

Die (III.) wird unbrauchbar, wenn $am = 0$, also 1) wenn $a = 0$, und 2) wenn $m = 0$ ist. In beiden Fällen reduzirt sie sich, wenn man mit am vorher wegmultiplizirt auf

$$0 = x^m(a+bx^n)^{p+1} - b(m+n+np)\int x^{m+n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx,$$

für $a = 0$ oder für $m = 0$. Ist daher $a = 0$, so wird sie

$$5) \int x^{m+n-1}(bx^n)^p \cdot dx = \frac{x^m(bx^n)^{p+1}}{b(m+n+np)} = \frac{x^m \cdot b^p \cdot (x^n)^{p+1}}{m+n+np};$$

ist dagegen $m = 0$, so gibt sie

$$6) \int x^{n-1}(a+bx^n)^p \cdot dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{bn(p+1)};$$

welche beide Gleichungen (5. u. 6.) richtige sind, aber nicht die verlangten Integrale, nämlich nicht

$$7) \int x^{m-1}(bx^n)^p \cdot dx \quad \text{und} \quad 8) \int x^{-1}(a+bx^n)^p \cdot dx$$

liefern, so daß diese letztern noch direkt behandelt werden müssen. — Die (7.) findet sich direkt augenblicklich. — Zerlegt man aber $(a+bx^n)^p$ in $(a+bx^n)^{p-1}$, so erhält man für die (8.) die Reduktionsformel

$$\int x^{-1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$$
$$= a\int x^{-1}(a+bx^n)^{p-1} \cdot dx + b\int x^{n-1}(a+bx^n)^{p-1} \cdot dx,$$

während letzteres $\int x^{n-1}(a+bx^n)^{p-1} \cdot dx = \frac{(a+bx^n)^p}{nbp}$ direkt

gefunden wird, $a+bx^n = z$ setzend, so daß dann

$$9)\ \int x^{-1}(a+bx^n)^p . dx = \frac{(a+bx^n)^p}{np} + a\int x^{-1}(a+bx^n)^{p-1} . dx\ ,$$

oder auch, durch Umkehrung dieser Gleichung, und wenn man $p+1$ statt p setzt,

$$10)\ \int x^{-1} . (a+bx^n)^p . dx$$

$$= -\frac{(a+bx^n)^{p+1}}{an(p+1)} + \frac{1}{a}\int x^{-1}(a+bx^n)^{p+1} . dx$$

sich findet, von welchen Gleichungen die erste nur brauchbar ist, wenn p positiv, die andere dagegen, wenn p negativ seyn sollte. Diese beiden Gleichungen (9. u. 10.) stecken jedoch schon in der (II.) für $m = 0$.

Und ist p eine gebrochene Zahl $\frac{\mu}{\nu}$, so wird $\int x^{-1}(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}} . dx$ auch razional, wenn $a+bx^n = z$ gesetzt wird.

Die (IV.) reduzirt sich, so oft $p+1$, oder n, oder a, $= 0$ werden, auf

$$0 = -x^m . (a+bx^n)^{p+1} + (m+n+np)\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+1} . dx;$$

welche Gleichung für $a = 0$, für $n = 0$ und für $p+1 = 0$, d. h. für $p = -1$ allemal richtig ist, aber nicht das Verlangte liefert.

Da die Fälle, wo $a = 0$ oder $n = 0$ ist, zu einfach sind, um Interesse zu gewähren, so betrachten wir bloß den Fall wo $p+1 = 0$, also $p = -1$ ist direkt, haben aber dann bloß

$$\int \frac{x^{m-1}}{a+bx^n} . dx$$

zu finden, so daß man sich dasmal, da m und n ganze Zahlen sind, zu der Integration der gebrochenen Funktionen zurückgeführt sieht. Von dorther wissen wir aber, daß wenn $m > n$ ist, zuerst $\frac{x^{m-1}}{a+bx^n}$

in eine **ganze** und in eine **ächt** gebrochene Funktion zerlegt werden muß, während letztere, oder wenn $m-1<n$ ist, diese Funktion $\frac{x^{m-1}}{a+bx^n}$ selbst, in einfache Parzial-Brüche zerlegt und dann letztere erst integrirt werden müssen, wie solches zu Anfange der nächsten Abtheilung, gerade für diesen Fall, ausgeführt sich findet.

§. 183.

Ganz auf ähnlichem Wege behandelt man die Integration von

$$x^m\cdot(a+bx+cx^2)^p\cdot dx,$$

wenn p nicht eine ganze positive Zahl ist, d. h. man sucht Reduktionsformeln auf, um solches auf einfachere und immer einfachere Integrale zurückzuführen. Wendet man zunächst die Formel

$$\int\left(\varphi\cdot\frac{d\psi}{dx}\right)\cdot dx = \varphi\psi-\int\left(\psi\cdot\frac{d\varphi}{dx}\right)\cdot dx$$

oder $\int\varphi\cdot d\psi = \varphi\psi-\int\psi\cdot d\varphi$ darauf an, $\frac{d\psi}{dx}=x^m$ also $\psi_x=\frac{x^{m+1}}{m+1}$ setzend, so erhält man, wenn $a+bx+cx^2=X$ genommen wird,

$$1)\int x^m\cdot X^p\cdot dx = \frac{x^{m+1}\cdot X^p}{m+1}-\frac{bp}{m+1}\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx$$
$$-\frac{2cp}{m+1}\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx,$$

weil $\int x^{m+1}\cdot(b+2cx)X^{p-1}\cdot dx$

in $b\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx+2c\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx$

sich zerlegt, welches sogleich die Formel Tafel (XXXV. N. 3.) ist, während aus ihr auch (N. 6.) derselben Tafel hervorgeht, sobald $-m$ statt m gesetzt wird.

Und weil

$$X^p = X^{p-1}(a+bx+cx^2) = aX^{p-1}+bxX^{p-1}+cx^2\cdot X^{p-1}$$

ist, so wird auch noch

$$2)\int x^m\cdot X^p\cdot dx = a\int x^m\cdot X^{p-1}\cdot dx+b\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx$$
$$+c\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx.$$

Ferner ist $dX = (b + 2cx) \cdot dx$, folglich auch

$$3) \int x^m \cdot X^p \cdot dx = \frac{1}{2c} \int x^{m-1} X^p \cdot dX - \frac{b}{2c} \int x^{m-1} \cdot X^p \cdot dx,$$

während nach der Formel

$$\int \left(\varphi \cdot \frac{d\psi}{dx}\right) \cdot dx = \varphi\psi - \int \left(\psi \cdot \frac{d\varphi}{dx}\right) \cdot dx$$

$d\psi = X^{p+1} \cdot dX$, also $\psi = \dfrac{X^{p+1}}{p+1}$ setzend,

$$4) \int x^{m-1} \cdot X^p \cdot dX = \frac{x^{m-1} \cdot X^{p+1}}{p+1} - \frac{m-1}{p+1} \int X^{p+1} \cdot x^{m-2} \cdot dx$$

gefunden wird.

Durch verschiedene Kombinationen dieser 4 Gleichungen (NN. 1.—4.) bilden sich nun die übrigen Reduktionsformeln der Tafel (XXXV.). Namentlich ergibt sich, wenn man (4.) in (3.) substituirt, und dabei (2.) anwendet, in letzterer $p+1$ statt p setzend, in so ferne dann zur Linken schon $\int x^m \cdot X^p \cdot dx$ steht, zur Rechten aber noch einmal $-\dfrac{m-1}{2p+2} \int x^m \cdot X^p \cdot dx$ erscheint, welches mit dem zur Linken zu $\dfrac{m+2p-1}{2(p+1)} \int x^m \cdot X^p \cdot dx$ vereinigt werden kann, sogleich die (N. 4.), und aus dieser, $-p$ statt p setzend, die (N. 1.) der Tafel (XXXV.). — Setzt man in diese letzterwähnte (N. 1.) $-m+2$ statt m, so erhält man durch algebraische Auflösung (Umkehrung) der Gleichung die (N. 2.), und aus dieser, $-p$ statt p setzend, wiederum die (N. 8.) derselben Tafel (XXXV.). — Und hat man anfänglich sogleich, durch Anwendung der Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi,$$

$$\int x^m \cdot X^p \cdot dx = \frac{x^{m+1} \cdot X^p}{m+1} - \frac{p}{m+1} \int x^{m+1} \cdot X^{p-1}(b+2cx) \cdot dx$$

gefunden, so kann man in dieser Gleichung statt $x^{m+1} \cdot X^{p-1}(b+2cx)$ sogleich $2x^m \cdot X^p - 2ax^m \cdot X^{p-1} - bx^{m+1} \cdot X^{p-1}$ setzen, erhält dadurch auf der rechten Seite dasselbe zur Linken schon stehende und

gesuchte Integral, mit $\frac{-2p}{m+1}$ noch multiplizirt, kann solches mit dem links stehenden zu $\frac{m+2p+1}{m+1}\int x^m \cdot X^p \cdot dx$ vereinigen, und man erhält dann sogleich auch die (N. 5.) und aus dieser, $-m$ statt m setzend, noch die (N. 7.) der Tafel (XXXV.). — Die (N. 10.) derselben Tafel ergibt sich, wenn man zuerst nach der Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi$$

$$\int X^p \cdot dx = X^p \cdot x - p\int X^{p-1}(bx+2cx^2) \cdot dx$$

findet, statt $X^{p-1}(bx+2cx^2)$ lieber $2X^p - X^{p-1}(2a+bx)$ setzt, zuletzt aber $X^{p-1} \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2c}X^{p-1} \cdot dX - \frac{b}{2c}X^{p-1} \cdot dx$ nimmt. Und aus dieser (N. 10.) ergibt sich dann (N. 9.) derselben Tafel, wenn man $-p+1$ statt p setzt, und die Gleichung dann algebraisch auflöst (umkehrt). *) Diese Formeln der Tafel (XXXV.), besonders aber (NN. 9. u. 10. mehrmals hinter einander angewandt, geben dann die Reduktionsformeln der Tafeln (XXXVI., XXXIX. u. XXXXI.); während aus denselben die Reduktionsformeln der Tafel (XXXIII.) hervorgehen, wenn man in letzteren zuvor y statt x^n setzt, in jenen aber y statt x, und dabei für m das Zweckgemäße substituirt. Außerdem können diese Fälle der Tafel (XXXIII.) auch direkt eben so behandelt werden (mutatis mutandis), wie die Fälle der Tafel (XXXV.) so eben behandelt worden sind.

§. 184.

Ganz auf dieselbe Weise wird auch

$$\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx$$

---

*) Diese Formeln sind schon (§. 121. D.) auf andern Wegen behandelt zu finden. Auch konnte man hier zuerst $a+bx+cx^2$ in $\alpha+\beta z^2$ umwandeln, nach (§. 180.), und dadurch die bekannte Erleichterung sich verschaffen

behandelt, und man findet augenblicklich die Reduktionsformeln der Tafel (XXXIII.).

Man kann aber auch $x^n = z$ setzen, um

$$x = z^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} \cdot dz, \quad x^{m-1} = z^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}$$

und

$$\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p \cdot dx = \frac{1}{n}\int z^{\frac{m}{n}-1} \cdot (a+bz+cz^2)^p \cdot dz$$

zu erhalten, und so diese Aufgabe unmittelbar in der des (§. 183.) behandelt zu sehen.

Man kann auch $x^n = u+\alpha$ setzen, hat dann $x = (u+\alpha)^{\frac{1}{n}}$, $dx = \frac{1}{n} \cdot (u+\alpha)^{\frac{1}{n}-1} \cdot du$ und indem man nachgehends α so bestimmt, daß $a+bx^n+cx^{2n}$ in die Form $A+Bu^2$ sich verwandelt, so reduzirt sich das gegebene Differenzial auf

$$\frac{1}{n} \cdot (u+\alpha)^{\frac{m}{n}-1}(A+Bu^2)^p \cdot du,$$

welche Umwandlung wenigstens dann Vortheile gewährt, so oft $\frac{m}{n}$ eine positive ganze Zahl ist.

Aber eben so kann man das oben gegebene Differenzial vorher in

$$x^{m+2pn-1} \cdot (a \cdot x^{-2n}+bx^{-n}+c)^p \cdot dx$$

verwandeln, und dann $x^{-n} = u+\alpha$ setzen, über α auf ähnliche Weise disponiren, und so das gesuchte Integral auf das von

$$-\frac{1}{n} \cdot (u+\alpha)^{-\frac{m}{n}-2p-1}(Cu^2+D)^p \cdot du \qquad \text{reduziren,}$$

welches wenigstens dann Vortheile gewährt, wenn $-\frac{m}{n}-2p-1$ eine positive ganze Zahl ist.

§. 185.

Und ähnliche Reduktionsformeln, könnte man sich verschaffen, wenn

$$x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n}+fx^{4n}+\ldots)^p dx$$

integrirt werden sollte. Wir begnügen uns hier einige derselben anzugeben.

Wird aber der Kürze wegen

$$a+bx^n+cx^{2n}+ex^{3n} \quad \text{durch} \quad X$$

bezeichnet, so finden sich, auf ähnlichen Wegen, wie die in den frühern (§§.) bezeichneten, diese Reduktionsformeln:

$$\text{I.} \quad \int x^{m-1}X^p . dx = \frac{x^m . X^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}X^{p-1} . dx$$
$$- \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}X^{p-1} . dx - \frac{3pne}{m}\int x^{m+3n-1}X^{p-1} . dx;$$

$$\text{II.} \quad \int x^{m-1}X^p . dx = \frac{x^{m-3n}X^{p+1}}{(m+3pn)e} - \frac{(m-3n)a}{(m+3pn)e}\int x^{m-3n-1}X^p . dx$$
$$- \frac{(m-2n+pn)b}{(m+3pn)e}\int x^{m-2n-1}X^p . dx$$
$$- \frac{(m-n+2pn)}{(m+3pn)e}\int x^{m-n-1}X^p . dx;$$

$$\text{III.} \quad \int x^{m-1}X^p . dx = \frac{x^m X^p}{m+3pn} + \frac{3pna}{m+3pn}\int x^{m-1}X^{p-1} . dx$$
$$+ \frac{2pnb}{m+3pn}\int x^{m+n-1}X^{p-1} . dx$$
$$+ \frac{pnc}{m+3pn}\int x^{m+2n-1}X^{p-1} . dx;$$

$$\text{IV.} \quad \int x^{m-1}X^p . dx = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}X^p . dx$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}X^p . dx$$
$$- \frac{(m+3n+3pn)e}{ma}\int x^{m+3n-1}X^p . dx.$$

§. 186.

Um

$$\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$$

zu finden, pflegt man ebenfalls mit der Anwendung der Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi$$

zu beginnen, und zu dem Ende das gegebene Differenzial

$$Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$$

bald so: $Cos\,x^{n-1} \cdot Sin\,x^m \cdot d(Sin\,x)$,

bald auch so: $-Sin\,x^{m-1} \cdot Cos\,x^n \cdot d(Cos\,x)$,

zu schreiben und man erhält.

$$\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$$

$$= \frac{1}{m+1} Cos\,x^{n-1} \cdot Sin\,x^{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int Cos\,x^{n-2} \cdot Sin\,x^{m+2} \cdot dx$$

oder

$$= -\frac{1}{n+1} Sin\,x^{m-1} \cdot Cos\,x^{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int Sin\,x^{m-2} \cdot Cos\,x^{n+2} \cdot dx,$$

welches die Resultate (I. u. II.) der Tafel (XXXXIII.) sind.

Setzt man nun in diesen Gleichungen

$$Sin\,x^{m+2} = Sin\,x^m(1 - Cos\,x^2) = Sin\,x^m - Sin\,x^m \cdot Cos\,x^2$$

oder

$$Cos\,x^{n+2} = Cos\,x^n(1 - Sin\,x^2) = Cos\,x^n - Cos\,x^n \cdot Sin\,x^2,$$

so ergeben sich (III. u. IV.) derselben Tafel. Und setzt man in (III.) $m+2$ statt m, oder in (IV.) $n+2$ statt n, so ergeben sich durch algebraische Auflösung (durch Umkehrung) die Formeln (V. u. VI.) derselben Tafel.

Und sind m und n positive oder negative ganze Zahlen, so kann man durch wiederholte Anwendung dieser Formeln andere Formeln in Form von endlichen Reihen erhalten, durch welche dieses Integral $\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x^n \cdot dx$ sogleich auf 1) $\int Sin\,x^m \cdot Cos\,x \cdot dx$ oder auf 2) $\int Sin\,x^m \cdot dx$ oder auf 3) $\int Cos\,x^n \cdot Sin\,x \cdot dx$ oder

auf 4) $\int Cos x^n \cdot dx$ zurückgeführt wird. Bedenkt man dann, daß $Cos x \cdot dx = d(Sin x)$ und $Sin x \cdot dx = -d(Cos x)$ ist, so findet sich augenblicklich

$$\int Sin x^m \cdot Cos x\, dx = \frac{Sin x^{m+1}}{m+1}$$

und
$$\int Cos x^n \cdot Sin x\, dx = -\frac{Cos x^{n+1}}{n+1}.$$

Die anderen Integrale $\int Sin x^m \cdot dx$ und $\int Cos x^n \cdot dx$ kann man in algebraische verwandeln, wenn man $Sin x = z$ oder $Cos x = z$ setzt. — Sind aber m und n ganze positive Zahlen, so lassen sich dieselbe Integrale auch finden, wenn man $Sin x^m$ und $Cos x^n$ in endliche Reihen verwandelt, die nach Sinus oder Kosinus von vielfachen Bogen fortlaufen, und dann die einzelnen Glieder von der Form

$$Sin px \cdot dx \quad \text{oder} \quad Cos px \cdot dx$$

integrirt, indem man $px = z$ setzt, dann $dx = \frac{1}{p} \cdot dz$ hat, so wie

$$\int Sin px \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \int Sin z \cdot dz = -\frac{1}{p} \cdot Cos z = -\frac{1}{p} \cdot Cos px,$$

$$\int Cos px \cdot dx = \frac{1}{p} \cdot \int Cos z \cdot dz = \frac{1}{p} \cdot Sin z = \frac{1}{p} \cdot Sin px$$

erhält. *)

---

*) Wir wollen für den Anfänger die ganze Rechnung hersetzen, uns jedoch dabei der Aggregate bedienen, für welche der erste Anfänger zunächst die Reihen selbst setzen oder gesetzt denken mag.

Es ist nämlich

$$Sin x = \frac{e^{x\cdot i} - e^{-x\cdot i}}{2i}, \text{ also } Sin x^m = \frac{1}{2^m i^m}(e^{x\cdot i} - e^{-x\cdot i})^m,$$

während nach dem binomischen Lehrsatze

$$(e^{x\cdot i} - e^{-x\cdot i})^m = S\Big[m_a \cdot (e^{x\cdot i})^a \cdot (-1)^b \cdot (e^{-x\cdot i})^b\Big]_{a+b=m}$$

$$= S\Big[m_a \cdot (-1)^b e^{(a-b)x\cdot i}\Big]_{a+b=m} \text{ ist.}$$

Anmerkung 1. Hätte man

$$\int Sin\,\varphi_x \cdot Cos\,\psi_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int Sin\,\varphi_x \cdot Sin\,\psi_x \cdot dx$$
$$\text{oder} \quad \int Cos\,\varphi_x \cdot Cos\,\psi_x \cdot dx$$

zu finden, so würde man damit beginnen, daß man die Pro=

Da nun, in so ferne m eine positive ganze Zahl seyn soll, in dieser Binomial=Reihe die Glieder vom Ende nach der Mitte zu dieselben Koeffizienten haben, wie die vom Anfange nach der Mitte zu, so kann man diese paarweise in ein einziges zusammenfassen, und zwar bleibt ein mittleres Glied für $a = n$ übrig, so oft m eine gerade Zahl $= 2n$ ist.

Man erhält dem zu Folge, weil $i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n$ ist,

$$Sin\,x^{2n} = \frac{1}{2^{2n}(-1)^n} S\left[(-1)^a \cdot (2n)_a \cdot (e^{2(n-a)x \cdot i} + e^{-2(n-a)x \cdot i})\right] + \frac{(2n)_n}{2^{2n}}$$

oder, weil $e^{2(n-a)x \cdot i} + e^{-2(n-a)x \cdot i} = 2 \cdot Cos\,2(n-a)x$ ist,

$$Sin\,x^{2n} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \underset{a+b=n-1}{S}\left[(-1)^a \cdot (2n)_a \cdot 2\,Cos\,(2n-2a)x\right] + \frac{(2n)_n}{2^{2n}};$$

demnach

$$\int Sin\,x^{2n} \cdot dx = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \cdot \underset{a+b=n-1}{S}\left[(-1)^a \cdot (2n)_a \cdot \frac{Sin(2n-2a)x}{n-a}\right] + \frac{(2n)_n}{2^{2n}} \cdot x$$

Und ist $m = 2n+1$ eine ungerade Zahl, so erhielte man

$$Sin\,x^{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}\,i^{2n+1}} \cdot \underset{a+b=n}{S}\left[(-1)^a \cdot (2n+1)_a \cdot (e^{(2n-2a+1)x \cdot i} - e^{-(2n-2a+1)x \cdot i})\right]$$

oder, weil $e^{(2n-2a+1)x \cdot i} - e^{-(2n-2a+1)x \cdot i} = 2i \cdot Sin\,(2n-2a+1)x$ ist,

$$Sin\,x^{2n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \underset{a+b=n}{S}\left[(-1)^a \cdot (2n+1)_a \cdot 2\,Sin\,(2n-2a+1)x\right];$$

demnach

$$\int Sin\,x^{2n+1} \cdot dx = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \cdot \underset{a+b=n}{S}\left[(-1)^{a+1} \cdot (2n+1)_a \cdot \frac{Cos\,(2n-2a+1)x}{2n-2a+1}\right]$$

Ein ähnliches Verfahren führt zu ähnlichen Resultaten für $\int Cos\,x^{2n} \cdot dx$ und $\int Cos\,x^{2n+1} \cdot dx$. (Vgl. Tafel XXXXIV.)

dukte der Sinus und Kosinus, in Summen von Sinus und Kosinus verwandelte, so daß man erhielte

$$Sin\,\varphi_x \cdot Cos\,\psi_x = \tfrac{1}{2} Sin(\varphi_x + \psi_x) + \tfrac{1}{2} Sin(\varphi_x - \psi_x),$$

$$Sin\,\varphi_x \cdot Sin\,\psi_x = \tfrac{1}{2} Cos(\varphi_x - \psi_x) - \tfrac{1}{2} Cos(\varphi_x + \psi_x),$$

$$Cos\,\varphi_x \cdot Cos\,\psi_x = \tfrac{1}{2} Cos(\varphi_x - \psi_x) + \tfrac{1}{2} Cos(\varphi_x + \psi_x).$$

Die verlangten Integrale reduzirten sich dann auf die Integration von

$$Sin(\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx \quad \text{und} \quad Cos(\varphi_x \pm \psi_x) \cdot dx,$$

welche letztere nun versucht werden müßte.

Hätte man z. B.

$$\int Sin(px+q) \cdot Cos(ax+b)dx$$

zu finden, so erhielte man dafür

$$\tfrac{1}{2}\int Sin[(p+a)x+(q+b)] \cdot dx + \tfrac{1}{2}\int Sin[(p-a)x+(q-b)] \cdot dx,$$

welche, indem man $(p+a)x+(q+b) = z$ oder $(p-a)x+(q-b) = v$ setzt, leicht gefunden werden können, so daß man erhält

$$\int Sin(px+q) \cdot Cos(ax+b) \cdot dx$$

$$= -\frac{Cos[(p+a)x+(q+b)]}{2(p+a)} - \frac{Cos[(p-a)x+(q-b)]}{2(p-a)}.$$

Man vergleiche damit die Tafel (XXXXIII.).

Anmerkung 2. Man übersehe aber nicht, daß alle solche $Sin\,x$ und $Cos\,x$ enthaltende Differenzialien algebraisch gemacht werden, so wie man $Sin\,x = z$ oder $Cos\,x = u$ setzt.

In manchen Fällen wird jedoch eine glücklichere Substitution bequemer seyn.

Ist z. B. $\int \frac{dx}{a+b \cdot Cos\,x}$ zu finden, so wird man am bequemsten $Cos\,x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ setzen (woraus $z = Tg\,\tfrac{1}{2}x$ wird) um

$$\int \frac{dx}{a+b \cdot Cos\,x} = 2 \cdot \int \frac{dz}{(a+b)+(a-b)z^2}$$ zu erhalten.

Und das Differenzial $\frac{Cos\,x \cdot dx}{a + b \cdot Cos\,x}$ wird man zuvor in

$$\left(\frac{1}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{a + b \cdot Cos\,x}\right) \cdot dx$$

verwandeln, um dann jeden Theil für sich integriren zu können.

Dagegen wird $\frac{Sin\,x \cdot dx}{a + b \cdot Cos\,x}$ am bequemsten integrirt, wenn man $Cos\,x = z$ setzt, weil sich solches dann sogleich in $\frac{-dz}{a + bz}$ verwandelt und, integrirt,

$$-\frac{1}{b} \cdot log\,(a + bz) \text{ d. h. } \frac{1}{b} \cdot log\,(a + b \cdot Cos\,x)$$

liefert.

§. 187.

Ist $\int \frac{a_1 + b_1 \cdot Cos\,z}{(a + b \cdot Cos\,z)^n} \cdot dz$ zu finden, so bildet man sich eine Reduktionsformel dadurch, daß man

$$\int \frac{a_1 + b_1 \cdot Cos\,z}{(a + b \cdot Cos\,z)^n} \cdot dz = \frac{A \cdot Sin\,z}{(a + b \cdot Cos\,z)^{n-1}} + \int \frac{A_1 + B_1 \cdot Cos\,z}{(a + b \cdot Cos\,z)^n} \cdot dz$$

setzt, differenzirt, vergleicht, und daraus A, A_1, und B_1 findet. (Vgl. Taf. LII. N. 5.)

Mit wenigen Ausnahmen, welche man bei einiger Uebung bald entdeckt, ist es in der Regel jedoch immer die alte Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi,$$

welche man anwendet, um Integrale wie z. B. $\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi$, $\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi$, $\int \frac{Sin\,\varphi \cdot d\varphi}{\varphi^n}$, $\int \frac{Sin\,\varphi \cdot d\varphi}{Cos\,\varphi^n}$, $\int f_x \cdot \frac{1}{Sin}\,x \cdot dx$, $\int f_x \cdot \frac{1}{Cos}\,x \cdot dx$, ꝛc. ꝛc., ferner $\int f_x \cdot log\,\varphi_x \cdot dx$, $\int f_x \cdot (log\,x)^n \cdot dx$, $\int \frac{f_x}{(log\,x)^n} \cdot dx$, $\int f_x \cdot a^x \cdot dx$, $\int e^{ax} \cdot Sin\,x^n \cdot dx$, $\int e^{ax} \cdot Cos\,x^n \cdot dx$ u. s. w. f., auf andere und andere Integrale zurückzuführen, welche immer einfacher werden, so daß man endlich zu einem ein=

fachsten gelangt, welches entweder mittelst einer der frühern Methoden integrirt werden kann, oder welches in endlicher Form nicht integrirbar ist, so daß dann ein Integral in Form einer unendlichen Reihe (etwa nach §§. 160. 164.) oder, wenn es bloß auf Bestimmung numerischer Werthe eines bestimmten Integrals abgesehen ist, durch Näherungsmethoden, wie (§. 161.) eine solche angedeutet ist, gefunden werden müssen.

Zu diesen letztern (welche nicht in endlicher Form integrirt werden können), gehören namentlich auch

1) $\int \frac{Sin\,\varphi \cdot d\varphi}{\varphi}$, 2) $\int \frac{Cos\,\varphi \cdot d\varphi}{\varphi}$, 3) $\int \frac{a^x}{x} \cdot dx$,

4) $\int \frac{dx}{log\,x}$ (gewöhnlich der Integral-Logarithme genannt), auch

5) $\int e^{e^y} \cdot dy$. *)

Anmerkung. Da sich $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$ und $\int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$ finden

---

*) Diese 3 letztern (3. 4. u. 5.) gehen in einander über. Setzt man nämlich in $\frac{a^x}{x} \cdot dx$, $a^x = z$, so hat man $x = \frac{log\,z}{log\,a}$, also $dx = \frac{dz}{z \cdot log\,a}$, also $\frac{a^x \cdot dx}{x} = \frac{dz}{log\,z}$, so daß $\int \frac{a^x \cdot dx}{x} = \int \frac{dz}{log\,z}$ ist.

Und setzt man in $\int e^{e^y} \cdot dy$, $e^y = x$, so hat man $e^y \cdot dy = dx$, $dy = \frac{dx}{x}$, demnach $\int e^{e^y} \cdot dy = \int \frac{e^x \cdot dx}{x}$.

Da übrigens a^x, $Sin\,x$, $Cos\,x$, selber schon unendliche Reihen sind, ihrer Definition zu Folge, so besteht das Mißliche dieser letztern Integrale, gegen z. B. $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$ oder $\int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$ gehalten, bloß darin, daß man für die ihnen entsprechenden unendlichen Reihen keine so einfachen Gesetze hat, nach denen mit ihnen operirt werden könnte, wie solche für a^x, $Sin\,x$, $Cos\,x$, existiren; endlich, daß man nicht solche berechnete Tafeln hat für ihre numerische Auswerthung, als z. B. die Sinus- und Kosinus-Tafeln sind, oder die Logarithmen-Tafeln.

lassen, wenn man $Sin\,\varphi = z$, oder $Cos\,\varphi = z$ setzt, so kann man

$$Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi$$

allemal vollständig integriren, es mögen m, n, positive oder negative ganze Zahlen seyn. Eben so läßt sich

$$\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi \quad \text{und} \quad \int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi$$

allemal vollständig integriren, so oft n eine positive ganze Zahl ist, dagegen auf

$$\int \frac{Sin\,\varphi \cdot d\varphi}{\varphi} \quad \text{und} \quad \int \frac{Cos\,\varphi \cdot d\varphi}{\varphi}$$

reduziren, wenn n eine negative ganze Zahl seyn sollte.

§. 188.

Für die Praxis ist es sehr wichtig zu bemerken, daß wenn

$$1) \quad \int \varphi_x \cdot dx = f_x$$

gefunden werden kann, dann auch dieselbe Funktion φ_x nach x integrirt werden kann, wenn in ihr $ax + b$ (oder bloß ax, für $b = 0$) gesetzt wird, und daß namentlich dann

$$2) \quad \int (\varphi_x)_{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot (f_x)_{ax+b} \qquad \text{ist.}$$

Und eben so findet sich dann noch

$$3) \quad \int x^{n-1} \cdot (\varphi_x)_{ax^n+b} \cdot dx = \frac{1}{na} \cdot (f_x)_{ax^n+b},$$

wenn allemal $(\varphi_x)_{ax^n+b}$ das bedeutet was aus φ_x wird, wenn man $ax^n + b$ statt x schreibt.

Denn setzt man in $(\varphi_x)_{ax+b} \cdot dx$, $ax+b = z$, so wird $a \cdot dx = dz$, also $(\varphi_x)_{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \varphi_z \cdot dz$.

Und setzt man in $x^{n-1} \cdot (\varphi_x)_{ax^n+b}$, $ax^n + b = z$, so wird $nax^{n-1} \cdot dx = dz$ und $x^{n-1} \cdot (\varphi_x)_{ax^n+b} \cdot dx = \frac{1}{na} \cdot \varphi_z \cdot dz$.

Demnach findet sich z. B. sogleich und ohne Rechnung

$$\int(ax+b)^m\cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{(m+1)a}, \quad \text{weil} \int x^m\cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1};$$

$$\int\frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\cdot log(ax+b), \quad \text{weil} \int\frac{dx}{x} = log\,x;$$

$$\int a^{px+q}\cdot dx = \frac{1}{p\cdot log\,a}\cdot a^{px+q}, \quad \text{weil} \int a^x\cdot dx = \frac{a^x}{log\,a};$$

$$\int\sqrt[3]{(ax+b)^2}\cdot dx = \frac{3}{5a}(ax+b)^{\frac{5}{3}}, \quad \text{weil} \int x^{\frac{2}{3}}\cdot dx = \tfrac{3}{5}x^{\frac{5}{3}};$$

$$\int\frac{dx}{(ax+b)^2} = -\frac{1}{a(ax+b)}, \quad \text{weil} \int\frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x};$$

$$\int\frac{x\cdot dx}{ax^2+b} = \frac{1}{2a}\cdot log(ax^2+b), \quad \text{weil} \int\frac{dx}{x} = log\,x;$$

$$\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{ax^2-b}} = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2-b}, \quad \text{weil} \int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x};$$

$$\int Sin(px+q)\cdot dx = -\frac{1}{p}Cos(px+q), \quad \text{weil} \int Sin\,x\cdot dx = -Cos\,x;$$

$$\int Cos(px+q)\cdot dx = \frac{1}{p}Sin(px+q), \quad \text{weil} \int Cos\,x\cdot dx = Sin\,x;$$

$$\int x^{n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{(p+1)bn}, \quad \text{weil} \int x^p\cdot dx = \frac{x^{p+1}}{p+1};$$

$$\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{a+bx^3}} = \frac{2}{3b}\cdot\sqrt{a+bx^3}, \quad \text{weil} \int\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x};$$

$$\int\frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^3)^{\frac{n}{2}}} = \frac{-2}{3b(n-2)}\cdot\frac{1}{(a+bx^3)^{\frac{n}{2}-1}},$$

$$\text{weil} \int\frac{dx}{x^{\frac{n}{2}}} = \frac{-2}{n-2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{n}{2}-1}};$$

u. s. w. f.

§. 189.

Schlüßlich machen wir für die gemeine Praxis noch auf folgende Punkte aufmerksam.

I. Ist ein Integral in Form eines Logarithmen gefunden, so kann man solches immer nach den Formeln

$$\frac{1}{Sin}x = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-x^2}+ix)$$

$$\frac{1}{Tg}x = \frac{1}{2i}\cdot log\left(\frac{1+i\cdot x}{1-i\cdot x}\right)$$

in einen Bogenausdruck verwandeln; und auch umgekehrt. *)

II. Ist ein Integral von der Form $A\cdot log\frac{CX}{D}$ gefunden, so sind $A\cdot log X$, $A\cdot log(-X)$, $A\cdot log CX$, $A\cdot log\frac{X}{D}$, u. s. w. f. ebenfalls besondere Integrale desselben Differenzials, wenn nur C, D, A nach x konstant sind; und jedes beliebige besondere Integral gibt allemal das, alle umfassende allgemeine, so wie auch das, immer dasselbe bleibende mit $x = a$ anfangende besondere, nach (§. 156.). Eben so sind $A\cdot log\sqrt{-X}$ und $A\cdot log\sqrt{X}$ ebenfalls nur um eine (nach x) Konstante verschieden.

---

*) Ist z. B. $log z$ zu verwandeln, so setze man $\frac{1+i\cdot x}{1-i\cdot x} = z$, findet daraus $x = i\cdot\frac{1-z}{1+z}$ und hat dann $log z = 2i\cdot\frac{1}{Tg}\left(i\cdot\frac{1-z}{1+z}\right)$. — Oder man setze $z = \sqrt{1-x^2}+i\cdot x$ d. h. $z - i\cdot x = \sqrt{1-x^2}$; und hat dann $z^2 - 2i\cdot zx = 1$, oder $x = \frac{z^2-1}{2i\cdot z}$, so daß die Gleichung

$$\frac{1}{Sin}x = \frac{1}{i}\cdot log(\sqrt{1-x^2}+i\cdot x),$$

wenn man diesen Werth für x substituirt, in

$$\frac{1}{Sin}\frac{z^2-1}{2i\cdot z} = \frac{1}{i}log z$$

übergeht und

$$log z = i\cdot\frac{1}{Sin}\frac{z^2-1}{2i\cdot z}$$

$$= i\cdot\frac{1}{Cos}\left(\pm\frac{z^2+1}{2z}\right)$$ gibt.

III. Ist ein Integral von der Form $A \cdot \frac{1}{Sin} X$ gefunden, wo X eine beliebige aber gegebene Funktion von x ist, so kann man für denselben Bogen, dessen Sinus X ist, den Kosinus, die Tangente, die Kotangente u. s. w. suchen, und so dasselbe besondere Integral, in den Formen

$$A \cdot \frac{1}{Cos} \sqrt{1-X^2}, \quad A \cdot \frac{1}{Tg} \frac{X}{\sqrt{1-X^2}}, \quad A \cdot \frac{1}{Cotg} \frac{\sqrt{1-X^2}}{X},$$

u. s. w. ausdrücken. Aehnliches gilt, wenn ein Integral unter der Form $A \cdot \frac{1}{Tg} X$ oder $A \cdot \frac{1}{Cos} X$ oder $A \cdot \frac{1}{Cotg} X$ erscheint.*)

IV. Man kann aber zu einem als Bogen z. B. $A \cdot \frac{1}{Sin} X$ oder $A \cdot \frac{1}{Cos} X$ oder $A \cdot \frac{1}{Tg} X$ rc. rc. dargestellten Integral auch noch eine Konstante hinzufügen, die ebenfalls in Bogenform ausgedrückt ist z. B. $A \cdot \frac{1}{Sin} \alpha$, $A \cdot \frac{1}{Cos} \alpha$, $A \cdot \frac{1}{Tg} \alpha$, rc. rc., dann den Sinus, Kosinus, die Tangente, oder Kotangente dieser Summe der Bogen, $\frac{1}{Sin} x + \frac{1}{Sin} \alpha$, $\frac{1}{Cos} x + \frac{1}{Cos} \alpha$, $\frac{1}{Tg} x + \frac{1}{Tg} \alpha$, rc. rc. finden, und so das Integral als einen Bogen darstellen, dessen Sinus, Kosinus, oder Tangente, rc. die eben gefundenen sind.

So findet man z. B. nach (II. Th. §. 653.)

$$A \cdot \frac{1}{Tg} x + A \cdot \frac{1}{Tg} \alpha = A \cdot \frac{1}{Tg} \frac{\alpha + x}{1 - \alpha x}$$

u. s. w. f.

V. Die gewöhnlichsten Umformungen der Integrale (durch Hinzufügung einer Konstanten) bestehen darin, daß man

---

*) Man muß jedoch hier nicht übersehen, was im zweiten Theile dieses Systems (§§. 648. — 651.) über diese Umformung der Bogenausdrücke gesagt worden ist.

$$-\frac{1}{Cos}X \quad \text{statt} \quad \frac{1}{Sin}X$$

$$-\frac{1}{Sin}X \quad \text{statt} \quad \frac{1}{Cos}X$$

$$-\frac{1}{Cotg}X \quad \text{statt} \quad \frac{1}{Tg}X$$

und $$-\frac{1}{Tg}X \quad \text{statt} \quad \frac{1}{Cotg}X$$

schreibt, desgleichen

$$\log X \quad \text{statt} \quad \log(-X)$$

und $$\log\sqrt{X} \quad \text{statt} \quad \log\sqrt{-X}.$$

VI. Man thut wohl, die gewöhnlichsten einfachsten Integrale im Gedächtniß zu behalten, namentlich diejenigen, welche in den Tafeln (LIII. u. LIV.) zu diesem Behufe verzeichnet worden sind.

VII. Auf andere einfach scheinende Integrale z. B.

$$\int \log x \cdot dx, \int \frac{1}{Sin} x \cdot dx, \int \frac{1}{Cos} x \cdot dx, \int \frac{1}{Tg} x \cdot dx, \text{ rc. rc.,}$$

wende man sogleich die Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi$$

an, indem man $dx = d\psi$, $x = \psi$ setzt, und man wird oft zum erwünschten Ziele gelangen.

VIII. Wenn man alle die Mittel angewendet hat, welche in dem vorhergehenden Kapitel und in dem gegenwärtigen mitgetheilt worden sind, ohne doch zu einer Integration in endlicher Form zu gelangen, so bleibt in der Regel nichts anderes übrig, als durch unendliche Reihen zu integriren, welches allemal möglich ist, welches aber, der Rücksichten wegen, welche dann die Praxis zu nehmen hat, erst in spätern Kapiteln dieses Systems gehörig gründlich und umfassend vorgetragen werden kann und soll, weshalb man sich hier vorläufig mit dem (§. 160.) darüber entwikkelten begnügen muß.

Namentlich mag der Anfänger noch bemerken, daß so wie in einem Differenzial zwei (oder mehr) veränderliche Wurzeln (oder

gebrochene Potenzen) vorkommen, solches aber nicht zu den (§. 179.) vermerkten gehört, dann selten eine Integration in endlicher Form möglich ist, zu welcher übrigens, wenn sie doch möglich seyn sollte, meist nur glückliche Substitutionen (also Zufall oder Gewandheit im Kalkul) führen werden.

So z. B. ist $\int \frac{\sqrt{1-e^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$ in endlicher Form nicht zu finden. *) — Dagegen werden z. B.

$$\int \frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}} \quad \text{und} \quad \int \frac{x^{m-1} \cdot dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{2x^m-1}}$$

razional gemacht (so daß sie dann nach (§. 177.) weiter behandelt werden können), wenn man bei dem erstern $\frac{\sqrt[2m]{2x^m-1}}{x} = u$, bei dem letztern dagegen $\sqrt[2m]{2x^m-1} = y$ setzt.

Eben so wird, wenn X eine algebraische razionale Funktion von x und $\sqrt{1+x^2}$ vorstellt,

$$\int X \cdot (x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{p}{q}} \cdot dx$$

razional gemacht, indem man

$$x+\sqrt{1+x^2} = u^q$$

setzt.

Und um noch an einem Beispiele zu zeigen, wie hier alles auf ein glückliches Auffassen des Einzelfalles ankomme, sey noch

$$\int \frac{e^x \cdot x \cdot dx}{(1+x)^2}$$

*) Es ist dies eines von denjenigen Integralen, welche unter dem Namen der elliptischen Transzendenten in eigenen Schriften zuerst von Le Gendre zuletzt von Jacobi (Professor zu Königsberg) behandelt worden sind.

Auf diese Behandlungen können wir aber erst in spätern Theilen dieses Systems hingeführt werden.

zu finden. — Setzt man, um den Nenner einfacher zu erhalten, $1+x = z$, also $dx = dz$, so hat man

$$\int \frac{e^x \cdot x}{(1+x)^2} \cdot dx = \frac{1}{e} \int \frac{e^z \cdot (z-1)}{z^2} \cdot dz.$$

Und vermuthet man

$$\int \frac{e^z \cdot (z-1)}{z^2} \cdot dz = e^z \cdot f_z,$$

so findet sich, differenziirend, und durch e^z wegdividirend,

$$\frac{z-1}{z^2} \text{ d. h. } \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = f_z + \partial f_z,$$

woraus der Geübtere sogleich

$\frac{1}{z} = f_z$ vermuthet, weil dann $\partial f_z = -\frac{1}{z^2}$ ist,

welches auch zutrifft; so daß zuletzt

$$\int \frac{e^x \cdot x \cdot dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} \text{ sich ergibt.}$$

Zweite Abtheilung.

Noch einige praktische Winke für solche Fälle der Integration entwickelt gegebener Differenzialien, welche in den hinten angehängten 54 Integral-Tafeln vorkommen.

---

§. 190.

Das Integral $\int \frac{x^m}{a+bx^n} \cdot dx$ (Taf. IV.) erfordert, wenn m und n ganze positive Zahlen sind und $m<n$ ist, die Zerlegung von $\frac{x^m}{a+bx^n}$ in Parzial-Brüche, welche letztern dann inte-

grirt werden. Ist aber $\frac{a}{b} = k^n$, so ist

$$\int \frac{x^m}{a+bx^n} \cdot dx = \frac{1}{b} \int \frac{x^m}{k^n+x^n} \cdot dx.$$

Um nun die Parzial-Brüche zu finden, in welche $\frac{x^m}{k^n+x^n}$ zerlegt werden kann, muß man zuvor k^n+x^n in die einfachen oder doppelten Faktoren zerlegen, und zu dem Ende zuvor alle Werthe von x finden, welche $k^n+x^n = 0$ identisch machen. Man findet dann, nach (II. Th. §. 694.), in so ferne aus $k^n+x^n = 0$, $x = k\sqrt[n]{-1}$ wird, und weil

$$\sqrt[n]{-1} = Cos\frac{2a+1}{n}\pi + i \cdot Sin\frac{2a+1}{n}\pi$$

auch

$$\sqrt[n]{-1} = Cos\frac{2a+1}{n}\pi - i \cdot Sin\frac{2a+1}{n}\pi$$

ist, unter a nach und nach alle Werthe 0, 1, 2, 3, ... $n-1$ gedacht, so oft n eine ungerade Zahl ist, für $a = \frac{n-1}{2}$ den einzigen reelen Faktor $x+k$, außerdem aber die $\frac{1}{2}(n-1)$ doppelten Faktoren

$$x^2 - 2kx \cdot Cos\frac{2a+1}{n}\pi + k^2$$

wo statt a nach und nach 0, 1, 2, 3, ... $\frac{n-3}{2}$, gesetzt werden muß, um aus diesem allgemeinen doppelten Faktor die $\frac{1}{2}(n-1)$ einzelnen, durch ihn repräsentirten, zu erhalten

Der Parzial-Bruch, dessen Nenner $x+k$ ist, hat aber zum Zähler, nach (§. 118.), $x^m : \frac{k^n+x^n}{k+x}$ für $k+x = 0$ d. h. für $x = -k$, während

$$\frac{k^n+x^n}{k+x} = k^{n-1} - k^{n-2}x + k^{n-3}x^2 - k^{n-4}x^3 + \ldots + x^{n-1} \text{ ist,}$$

also für $x = -k$, in nk^{n-1} übergeht, welches auch $= n(-k)^{n-1}$ geschrieben werden kann, da $n-1$ eine gerade Zahl ist. Der erste

Parzial-Bruch wird daher $= \frac{1}{n(-k)^{n-m-1}} \cdot \frac{1}{x+k}$, *) dessen Integral $= \frac{1}{n(-k)^{n-m-1}} \cdot log(x+k)$ ist.

Der zu dem Nenner $x^2 - 2kx \cdot Cos\frac{2a+1}{n}\pi + k^2$ gehörige Zähler $A+Bx$ findet sich ferner, nach (§§. 76.—80.), aus den Gleichungen, welche aus

$$x^m - (A+Bx) \cdot \frac{k^n + x^n}{x^2 - 2kx \cdot Cos\frac{2a+1}{n}\pi + k^2} = 0 \text{ hervorgehen,}$$

wenn man in dieser Gleichung $k \cdot \left(Cos\frac{2a+1}{n}\pi + i \cdot Sin\frac{2a+1}{n}\pi\right)$ statt x setzt, nachgehends aber den reelen Werh für sich, und den mit dem Faktor i behafteten für sich, $= 0$ setzt. Weil aber

$$\frac{k^n + x^n}{x^2 - 2kx \cdot Cos\frac{2a+1}{n}\pi + k^2}$$

für $x = k \cdot \left(Cos\frac{2a+1}{n}\pi + i \cdot Sin\frac{2a+1}{n}\pi\right)$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, so bestimmt sich dessen Werth, wenn man Zähler und Nenner nach x differenzlirt, so daß man

$$\frac{nx^{n-1}}{2x - 2k \cdot Cos\frac{2a+1}{n}\pi}$$

für $x = k \cdot \left(Cos\frac{2a+1}{n}\pi + i \cdot Sin\frac{2a+1}{n}\pi\right)$, dafür nimmt, nach (§§. 82.—84.). **) Daraus folgt dann der Parzial-Bruch

---

*) Man kann auch, $x^n + k^n = (x+k) \cdot P_x$ setzend, $(P_x)_{-k} = [\partial(x^n+k^n)_x]_{-k}$ erhalten, also $= (nx^{n-1})_{-k} = n(-k)^{n-1}$, welches der (§. 118, Anmerkung) vorgeschriebene, und hier bequemere Weg ist, gegen die obige Bestimmung gehalten.

**) Dasselbe Resultat erhält man aber noch bequemer nach der (Anmerkung zu §. 127.).

$$\frac{2}{nk^{n-m-1}} \cdot \frac{-k \cdot Cos(n-m)\frac{2a+1}{n}\pi + x \cdot Cos(n-m-1)\frac{2a+1}{n}\pi}{x^2 - 2kx \cdot Cos\frac{2a+1}{n}\pi + k^2},$$

welcher nun nach (§. 177.) sogleich integrirt werden kann. Und weil dieser Parzial-Bruch die einzelnen doppelten Parzial-Brüche alle repräsentirt, so muß die Summe aller aus diesem Integral für $a = 0, 1, 2, 3, \ldots \frac{n-3}{2}$ hervorgehenden Glieder gesetzt werden; weshalb dann als Endresultat das (Taf. IV, 1.) stehende sich ergibt.

Der Anfänger wird nun danach auch (N. 2. u. N. 3.) derselben Tafel (IV.) auffinden können.

Anmerkung. Wie die Formeln (I.—IV.) derselben Tafel (IV.) gefunden werden, ist bereits (§. 182.) gezeigt worden.

§. 191.

Die Formeln der Tafel (VI.), so wie die Fälle der Tafeln (VIII.—XII.) welche von der Form

$$x^m \cdot (a+bx)^{\frac{p}{q}} \cdot dx, \quad \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx)^{\frac{p}{q}}} \quad \text{sind,}$$

(wo $\frac{p}{q}$ auch $= \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \frac{n}{2}$ seyn können), ergeben sich sogleich alle auf dem Wege der Substitution, $a+bx = z$ setzend, in so ferne m immer als eine positive ganze Zahl gedacht wird. Der praktischen Bequemlichkeit wegen wird man aber diesen Weg nur bei den einfachen Fällen betreten, bei den zusammengesetztern Fällen dagegen zuerst die Reduktionsformeln der Tafel (IV.) anwenden. Die zusammengesetztern Fälle der Tafeln (VI. u. VII.) können auch noch durch Zerlegung in Parzial-Brüche integrirt werden. Die einfachern Fälle der Tafeln (VIII. u. XIII.), so wie die Fälle derselben Tafeln von der Form

$$\frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^{\frac{p}{q}}}, \quad x^m \cdot (a+bx)^{\frac{p}{q}} \cdot dx, \quad \frac{(a+bx)^{\frac{p}{q}}}{x^m} \cdot dx,$$

wo $\frac{p}{q}$ auch $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{5}, \ldots \frac{n}{2}$ seyn kann, werden razional gemacht, indem man $a+bx = z^q$ setzt; dann können sie durch die Reduktionen, oder direkt, wie die Fälle der Tafeln (VI. u. VII.) weiter behandelt werden. Auch können diese letztgenannten zusammengesetztern der irrazionalen Fälle vorher, mittelst der Reduktionsformeln der Tafel (IV.) auf die einfachern Fälle zurück geführt, und letztere dann razional gemacht oder direkt integrirt werden.

§. 192.

Solche Differenzialien wie z. B.

$$\sqrt{a+bx}\cdot dx, \quad \sqrt[3]{a+bx}\cdot dx, \quad \sqrt[3]{(a+bx)^2}\cdot dx, \quad \sqrt{a+bx+cx^2}\cdot dx,$$

pflegt man auch wohl, statt sie direkt zu integriren, zuvor so zu behandeln, daß man

$$\int\sqrt{a+bx}\cdot dx = \int\frac{a+bx}{\sqrt{a+bx}}\cdot dx$$

$$= a\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}\cdot dx + b\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx}},$$

$$\int\sqrt[3]{a+bx}\cdot dx = \int\frac{a+bx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}\cdot dx$$

$$= a\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}\cdot dx} + b\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}},$$

$$\int\sqrt[3]{(a+bx)^2}\cdot dx = \int\frac{a+bx}{\sqrt[3]{(a+bx)}}\cdot dx$$

$$= a\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)}} + b\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{(a+bx)}},$$

$$\int\sqrt{a+bx+cx^2}\cdot dx = a\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$+ b\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} + c\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}, \text{*)}$$

---

*) Umgekehrt kann man aber diese Gleichung gebrauchen, um

nimmt, in der Hoffnung oder Voraussetzung, daß letztere Integrale zur Rechten entweder schon gefunden sind, oder doch leichter gefunden werden, als das in Rede stehende zur Linken.

§. 193.

Auch setzt man häufig $x = \frac{1}{z}$ in der Hoffnung, daß dadurch das gesuchte Integral auf ein schon bekanntes zurückgeführt werden möge. Auf diesem Wege findet man:

1) $\int x^m \cdot (a+bx)^{\frac{p}{q}} \cdot dx = -\int \frac{(b+az)^{\frac{p}{q}}}{z^{m+2+\frac{p}{q}}} \cdot dz,$

2) $\int x^m \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}} \cdot dx = -\int \frac{(b+az)^{\frac{n}{2}}}{z^{m+2+\frac{n}{2}}} \cdot dz,$ *)

3) $\int \frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{x^m} \cdot dx = -\int z^{m-2-\frac{n}{2}} \cdot (b+az)^{\frac{n}{2}} \cdot dz,$

4) $\int \frac{x^m \cdot dz}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = -\int \frac{dz}{z^{m+2-\frac{n}{2}} \cdot (b+az)^{\frac{n}{2}}},$

5) $\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}}} = -\int \frac{z^{m+\frac{n}{2}-2} \cdot dz}{(b+az)^{\frac{n}{2}}},$

6) $\int \frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\int \frac{dz}{z^{m+1}\sqrt{az^2+bz+c}},$

$\int \frac{x^2 \cdot dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$ in die andern, als schon gefunden angesehenen Integrale auszudrücken.

*) Dies gewährt schon Bequemlichkeit wenn etwa

$x^r \cdot \sqrt{x} \cdot (a+bx)^{\frac{7}{2}} \cdot dx$ integrirt werden sollte, weil jetzt $m = r + \frac{1}{2}$, $n = 7$, also $m+2+\frac{n}{2} = r+6$ eine ganze Zahl wird, wenn r selbst eine ganze Zahl ist.

$$7)\ \int \frac{dx}{x^m \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}} = -\int \frac{z^{m-1} \cdot dz}{\sqrt{az^2+bz+c}},$$

$$\text{also } \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx+cx^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{az^2+bz+c}},$$

$$8)\ \int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = -\int \frac{dz}{z^{m+2-n}(az^2+bz+c)^{\frac{n}{2}}},$$

$$9)\ \int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx+cx^2)^{\frac{n}{2}}} = -\int \frac{z^{m+n-2} \cdot dz}{(az^2+bz+c)^{\frac{n}{2}}},$$

u. s. w. f.; so daß durch diese einfache Substitution, eine große Anzahl der hiehergehörigen Fälle in den Tafeln, auf andere Fälle derselben Tafeln zurückgeführt sind, daher die einen aus den andern berechnet werden können.

§. 194.

Die Fälle der Tafeln (XIV. XV. u. XXIII.) werden auf razionale Fälle zurückgebracht, wenn man $\sqrt{x} = z$ setzt; in der Tafel (XVI.) dagegen wird $\sqrt{a+bx} = z$ gesetzt, um ihre Fälle razional gemacht zu sehen. — Die zusammengesetztern Fälle werden dabei immer, nach der Tafel (IV.), durch Reduktion zuvor auf die einfachsten Fälle zurückgeführt. In der Tafel (XVI.) kann man auch $f+gx = z$ setzen, und man sieht mehre der dortigen Fälle auf früher bereits betrachtete zurückgeführt. In derselben Tafel sieht man auch häufig das gegebene Differenzial bloß algebraisch in eine Summe oder Differenz zerlegt; in so ferne z. B.

$$x = \frac{1}{g} \cdot [(f+gx)-f],$$

oder

$$x^2 = \frac{1}{g^2} \cdot [(f+gx)^2 - 2f(f+gx) + f^2],$$

oder

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} \cdot \left[\frac{f+gx}{x} - g\right],$$

oder

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{f^2 x} \cdot \left[\frac{f(f+gx)}{x^2} - g \cdot \frac{f+gx}{x} + g^2\right],$$

u. s. w. f. gesetzt werden kann, wie übrigens noch mehr in die Augen fällt, wenn man $f+g^x = z$ setzt, so daß $x = \frac{1}{g}(z-f)$ wird.

§. 195.

Die Fälle der Tafeln (XVII. u. XVIII.) können alle durch Zerlegung in Parzial-Brüche integrirt werden. Die Zusammengesetztern davon werden aber bequemer zuvor mittelst der Tafel (IV.) auf die einfachsten zurückgeführt. — Auch kann man in $\frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^n)^p}$, $x = \frac{1}{z}$ setzen, und erhält

$$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^n)^p} = -\int \frac{z^{m-2+np} \cdot dz}{(b+az^n)^p},$$

also auch

$$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^2)^p} = -\int \frac{z^{m-2+2p} \cdot dz}{(b+az^2)^p},$$

so daß dadurch mehre dieser Fälle aus den übrigen abgeleitet werden können. — Hat man endlich

$$\int \frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^p} \cdot dx \quad \text{oder} \quad \int \frac{dx}{x^{2m+1} \cdot (a+bx^2)^p}$$

zu finden, so kann man $a+bx^2 = z$ setzen, so daß

$$\int \frac{x^{2m+1}}{(a+bx^2)^p} \cdot dx = \frac{1}{2b^{m+1}} \int \frac{(z-a)^m}{z^p} \cdot dz,$$

und $\int \frac{dx}{x^{2m+1} \cdot (a+bx^2)^p} = \frac{1}{2} b^m \int \frac{dz}{z^p \cdot (z-a)^{m+1}}$ wird,

welche letztern zu den früher schon behandelten oder doch leichter und leicht zu behandelnden gehören.

§. 196.

Die Fälle der Tafeln (XIX. — XXII. u. XXIV.) werden razional gemacht, wenn man $a+bx^2 = z+x \cdot \sqrt{b}$ oder $= \sqrt{a}+xz$ oder $= (\sqrt{a}-x \cdot \sqrt{-b}) \cdot z$ setzt. Die zusammengesetztern in (XIX. — XXII.) werden aber bequemer vorher

mittelst der Tafel (IV.) auf die einfachsten zurückgeführt. — Auch lassen sich die, bei den frühern Tafeln angegebenen praktischen Vortheile anwenden, um diese Formeln zum Theil bequem aus einander abzuleiten. In einigen Fällen der Tafel (XXIV.) kann man auch versuchen und $f+gz=z$ setzen, überhaupt auch die (§. 194.) für Tafel (XVI.) angegebenen Zerlegungen eintreten lassen, an welche sich leicht die Zerlegungen der letztern Nummern in (XXIV.) anschließen. — Soll aber

$$\frac{x^{2m+1}\cdot dx}{(f+gx^2)\sqrt{a+bx^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{dx}{x^{2m+1}\cdot(f+gx^2)\sqrt{a+bx^2}}$$

integrirt werden, so setze man nur $x^2=z$, so wird $x^{2m}=z^m$, $x\cdot dx=\frac{1}{2}dz$, und diese beiden Differenzialien verwandeln sich beziehlich in

$$\frac{\frac{1}{2}z^m\cdot dz}{(f+gz)\sqrt{a+bz}} \quad \text{und} \quad \frac{\frac{1}{2}dz}{z^{m+1}\cdot(f+gz)\sqrt{a+bz}},$$

welche früher bereits Tafel (XVI.) behandelt worden sind.

§. 197.

Die Fälle der Tafeln (XXV.—XXVIII.) können alle durch Zerlegung in Parzial-Brüche integrirt werden. — Die zusammengesetztern werden bequemer nach Tafel (IV.) erst auf die einfachsten zurückgeführt. — Und die Differenzialien von der Form

$$\frac{x^{3m+2}\cdot dx}{(a+bx^3)^p}, \quad \frac{dx}{x^{3m+1}\cdot(a+bx^3)^p},$$

werden auf frühere zurückgebracht, sobald man $x^3=z$ setzt; — so wie $x^4=z$ die Differenzialien

$$\frac{x^{4m+3}\cdot dx}{(a+bx^4)^p} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{x^{4m+1}\cdot(a+bx^4)^p}$$

in bereits behandelte verwandelt.

§. 198.

Die Fälle der Tafeln (XXIX.—XXXII.) werden alle razional gemacht, wenn $ax+bx^2=x\cdot z$, oder $=z+x\cdot\sqrt{b}$ setzt.

Man kann auch $\frac{x^m}{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$ in $\frac{x^{m-\frac{n}{2}}}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$, desgleichen $\frac{1}{x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$ in $\frac{1}{x^{m+\frac{n}{2}}\cdot(a+bx)^{\frac{n}{2}}}$, u. s. f. verwandeln, die Tafel (IV.) anwenden, und so diese Integrale alle auf die Integration von $\frac{\sqrt{x}\cdot dx}{\sqrt{a+bx}}$ oder $\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{a+bx}}$ oder $\sqrt{x}\cdot\sqrt{a+bx}\cdot dx$ oder $\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{x}}\cdot dx$ zurückführen. — Auch kann

$$(ax+bx^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{ax+bx^2}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

und

$$(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{(ax+bx^2)^2}{\sqrt{a+bx^2}},$$

u. s. w. f. genommen, und so ein Differenzial, wo $(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}$ im Zähler vorkommt, in mehre andre zerlegt werden, welche alle bloß $\sqrt{ax+bx^2}$ im Nenner haben.

§. 199.

Auf der Tafel (XXXIII.) versteht sich (N. 2.) von selbst, in so ferne man $x^n = z$ setzt, und

$$\frac{1}{a+bz+cz^2} \text{ in } \frac{h}{cz+f} - \frac{h}{cz+g}$$

verwandelt, wenn $\frac{f}{c}$ und $\frac{g}{c}$ die Werthe von z sind, welche $a+bz+cz^2$ zu Null machen.

Die (N. 1.) muß so behandelt werden, wie (§. 190.) für die Fälle der Tafel (IV.) gezeigt worden ist. — Die Reduktionsformeln (I.—V.) derselben Tafel (XXXIII.) sind bereits (§§. 183. u. 184.), zugleich mit denen der Tafel (XXXV.), nachgewiesen. — Die Tafel (XXXIV.) enthält dasselbe für $n = 2$. — Die Fälle der Tafeln (XXXVI. — XLII.) bedürfen keines weitern

Kommentars, besonders wenn man sich an das früher und namentlich an das (§§. 191. — 198.) Gesagte erinnert.

§. 200.

Die Integrale (1.—3.) der Tafel (XXXXIII.) erhält man, wenn man das Produkt der Sinus und Kosinus, nach den Elementen der analytischen Trigonometrie in eine Summe oder Differenz von Sinus oder Kosinus verwandelt und dann jeden Theil auf dem Wege der Substitution integrirt, oder aus (§. 188.) entnimmt. Die Reduktionsformeln (I.—VI.) derselben Tafel sind schon früher (§. 186.) besprochen. — Die Tafeln (XLIV. — XLIX.) sind bloße Folgerungen aus den eben erwähnten Reduktionsformeln.

Die Fälle der Tafeln (L.—LII.) endlich sind (mit Ausnahme der Formel (LII. N. 5.), welche (§. 187.) behandelt sich findet), bloß nach der Formel

$$\int\varphi\cdot d\psi = \varphi\psi - \int\psi\cdot d\varphi,$$

dieselbe wiederholt anwendend, behandelt, welche letztere Formel überhaupt bei allen Reduktionen die wichtigste, bei den meisten sogar die einzige Rolle spielt.

Wir wollen dies noch im Speziellen für die Integration von

$$\int e^{ax}\cdot Sin\,x^n\cdot dx$$

nachweisen. — Man setze in der Formel

$$\int\varphi\cdot d\psi = \varphi\psi - \int\psi\cdot d\varphi,$$

$\varphi = Sin\,x^n$, $d\psi = e^{ax}\cdot dx$, also $\psi = \frac{1}{a}\cdot e^{ax}$, so erhält man zunächst, weil $d\varphi = n\cdot Sin\,x^{n-1}\cdot Cos\,x\cdot dx$,

$$1)\ \int e^{ax}\cdot Sin\,x^n\cdot dx = \frac{1}{a}\cdot e^{ax}\cdot Sin\,x^n - \frac{n}{a}\int e^{ax}\cdot Sin\,x^{n-1}\cdot Cos\,x\cdot dx.$$

Verwandelt man nun dieses letztere Integral nach derselben Reduktionsformel, so erhält man

$$2) \int e^{ax} \cdot Sin\,x^{n-1} \cdot Cos\,x\,dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \cdot Sin\,x^{n-1} \cdot Cos\,x$$
$$- \frac{1}{a} \int e^{ax} \cdot [(n-1) Sin\,x^{n-2} \cdot Cos\,x^2 - Sin\,x^n] \cdot dx.$$

Wird aber hier $1 - Sin\,x^2$ statt $Cos\,x^2$ gesetzt, dann dieser Werth von $\int e^{ax} \cdot Sin\,x^{n-1} \cdot Cos\,x \cdot dx$ aus (2.) in (1.) substituirt, so erhält man, wenn man nur $\frac{n^2}{a^2} \int e^{ax} \cdot Sin\,x^n \cdot dx$, welches zur Rechten erscheint, mit dem zur Linken stehenden Integral zu $\frac{a^2+n^2}{n^2} \int e^{ax} \cdot Sin\,x^n \cdot dx$ vereinigt, sogleich die Formel (Taf. LII. N. 3.). — Auf ähnlichem Wege findet sich dann auch die (N. 4.) derselben Tafel. *)

Dritte Abtheilung.

Einiges über den Gebrauch der Integral-Tafeln, namentlich in Beziehung auf die Aggregaten-Ausdrücke.

---

§. 201.

Soll z. B. $\int \frac{x^7 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$ gefunden werden, so nimmt man aus der Tafel (IV.) diejenige Reduktionsformel, in welcher der Exponent m vermindert wird, nämlich die (I.); hat dann $p = -\frac{1}{2}$, $m = 8$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, und μ nimmt man so groß, daß $m - \mu n - 1$, d. h. $7 - 2\mu$ kleinstmöglichst werde, d. h. 0 oder 1; folglich $\mu = 3$. — Dann liefert diese Formel (I.)

---

*) Da man statt $Sin\,x$ und $Cos\,x$ auch die Potenz-Ausdrücke $\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$ und $\frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$ setzen kann, so finden sich solche Integrale, wie die hier in Rede stehenden, auch durch bloße Integration solcher Potenzen, jedoch mit ziemlich viel Rechnung, so daß die Anwendung dieser Reduktionsformeln immer vorzuziehen ist.

$$\int\frac{x^7 \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\cdot S\left[\frac{6^{a|-2}x}{7^{a+1|-2}}\cdot x^{6-2a}\right]_{a+b=2}$$
$$+\frac{6^{3|-2}}{7^{3|-2}}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Weil hier, der Gleichung $a+b=2$ wegen, a bloß die 3 Werthe 0, 1, 2, haben kann, *) so enthält das Aggregat die 3 Glieder

$$-\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1}{7}\cdot x^6+\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot x^4+\frac{1}{3}\cdot\frac{6\cdot 4}{7\cdot 5}\cdot x^2\right),$$

während $\frac{6^{3|-2}}{7^{3|-2}}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}\sqrt{1-x^2}$ ist,

so daß dadurch $\int\frac{x^7\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$, in 4 Gliedern ausgedrückt gefunden ist.

Auf dieselbe Weise findet sich aus derselben Reduktionsformel, $\mu = 4$ nehmend,

$$-\sqrt{1-x^2}\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot x^7+\frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot x^5+\frac{1}{4}\cdot\frac{7\cdot 5}{8\cdot 6}\cdot x^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{7\cdot 5\cdot 3}{8\cdot 6\cdot 4}\cdot x\right]$$
$$+\frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot\frac{1}{Sin}x = \int\frac{x^8\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Aber eben so gut und noch etwas bequemer konnte (N. 16.) der Tafel (XVII.) dazu benutzt werden.

§. 202.

Sollte aber

$$\int\frac{dx}{x^7\cdot\sqrt{1-x^2}} \quad \text{oder} \quad \int x^{-7}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx$$

gefunden werden, so hätte man die Formel (III.) der Tafel (IV.) zu nehmen, und man erhielte, $m = -6$, $a = 1$, $b = -1$, $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$ und $\mu = 3$ setzend,

---

*) Es ist nämlich eine Hauptbedingung, daß die deutschen Buchstaben nie andere Werthe haben, als 0 und positive ganze Zahlen, und zwar alle möglichen, welche der beschriebenen Gleichung (hier $a+b=2$) genügen.

$$\int x^{-7}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = \sqrt{1-x^2}\cdot \underset{a+b=2}{S}\left[\frac{(-5)^{a|2}}{(-6)^{a+1|2}}\cdot x^{-6+2a}\right] + \frac{(-5)^{3|2}}{(-6)^{3|2}}\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}};$$

oder für $\mu = 4$,

$$\int x^{-7}\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot dx = \sqrt{1-x^2}\cdot \underset{a+b=3}{S}\left[\frac{(-5)^{a|2}}{(-6)^{a+1|2}}\cdot x^{-6+2a}\right] + \frac{(-5)^{4|2}}{(-6)^{4|2}}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

welcher letztere Ausdruck jedoch, weil $(-6)^{4|2} = 0$ ist, 0 im Nenner bekommt, daher nicht brauchbar genannt werden kann.

Das erstere Resultat liefert nun, weil $a+b = 2$ dem a bloß die 3 Werthe 0, 1, 2 zuläßt, wenn man solche nach und nach statt a in das allgemeine Glied des Aggregats setzt, zunächst die 3 Glieder

$$\sqrt{1-x^2}\cdot\left[-\frac{1}{6x^6}-\frac{5}{6\cdot 4\cdot x^4}-\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2\cdot x^2}\right],$$

während

$$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{1-x^2}} = log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = -log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

gefunden wird, entweder aus der Tabelle oder indem man $\sqrt{1-x^2} = z$ setzt; so daß zuletzt wird

$$\int\frac{dx}{x^7\cdot\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\cdot\left[\frac{1}{6x^6}+\frac{5}{6\cdot 4\cdot x^4}+\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2\cdot x^2}\right] + \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\cdot log\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Auch konnte dazu die (N. 11.) der Tafel (XVIII.) benutzt werden.

§. 203.

Sollte aber $\int\frac{x^{18}\cdot dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}}$ gefunden werden, so hätte man zuerst die Reduktionsformel (IV.) der Tafel (IV.) zu versuchen, um das gesuchte Integral auf die Integration von $\int\frac{x^{18}\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$

zurückzuführen, welche letztere dann wieder, nach der (§. 201.) beschriebenen Weise, auf die Integration von $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zurückgeführt wird.

Man kann aber auch zuerst die Formel (I.) der Tafel (IV.) anwenden, um die verlangte Integration auf die von $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}}$ zurückzuführen, welches letztere dann erst nach (IV.) der Tafel (IV.), bequemer aber noch nach Tafel (XVII. N. 15.), auf $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ zurückgebracht wird.

Ueberhaupt kann man unter den speziellen Tafeln diejenige aufsuchen, die mit

$$\int\frac{x^m \cdot dx}{(a+bx^2)^p}$$

überschrieben ist, darin (N. 16.) nehmen, $a = 1$, $b = -1$, $p = \frac{11}{2}$, $m = 18$ setzen, und man erhält

$$\int\frac{x^{18}\cdot dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} = \frac{-1}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}\cdot S\left[\frac{17^{a|-2}}{8^{a+1|-2}}\cdot x^{17-2a}\right]_{a+b=n-1}$$
$$+\frac{17^{n|-2}}{8^{n|-2}}\int\frac{x^{18-2n}\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{11}{2}}}.$$

Weil man aber hier für $n = 5$, in so ferne $8^{5|-2} = 0$ ist, bereits 0 im Nenner bekommt, so darf man höchstens $n = 4$ nehmen, wodurch $a+b = n-1 = 3$, für a die 4 Werthe 0, 1, 2, 3 liefert, weshalb dann die Gleichung in folgende übergeht

$$-\int\frac{x^{18}\cdot dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} =$$
$$\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{9}{2}}}\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot x^{17}+\frac{17}{8\cdot 6}\cdot x^{15}+\frac{17\cdot 15}{8\cdot 6\cdot 4}\cdot x^{13}+\frac{17\cdot 15\cdot 13}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot x^{11}\right]$$
$$-\frac{17\cdot 15\cdot 13\cdot 11}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\cdot\int\frac{x^{10}\cdot dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}},$$

welches letztere Integral nun noch gefunden werden muß. — Wendet man aber auf dieses letztere nun die Reduktionsformel (IV.) der Tafel (IV.) an, so hat man sogleich, $a = 1$, $b = -1$,

$n = 2$, $m = 11$, $p = -\frac{11}{2}$ setzend, indem man $\mu = 5$ nimmt,

$$\int\frac{x^{10}.dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} = -x^{11}.S\left[\frac{2^{a|2}}{(-9)^{a+1|2}}.(1-x^2)^{-\frac{9}{2}+a}\right]_{a+b=4} + \frac{2^{5|2}}{(-9)^{5|2}}.\int\frac{x^{10}.dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -x^{11}.\left[-\frac{1}{9}(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}+\frac{2}{9.7}(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}\right.$$
$$-\frac{2.4}{9.7.5}(1-x^2)^{-\frac{5}{2}}+\frac{2.4.6}{9.7.5.3}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$\left.-\frac{2.4.6.8}{9.7.5.3.1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right]-\frac{2.4.6.8.10}{9.7.5.3.1}.\int\frac{x^{10}.dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

während dieses $\int\frac{x^{10}.dx}{\sqrt{1-x^2}}$ nach (§. 201.) sogleich noch gefunden werden kann; so daß aus diesen Theilen das Ganze zuletzt leicht zusammengesetzt wird.

Hätte man auf $\int\frac{x^{18}.dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}}$ sogleich die Reduktionsformel (IV.) der Tafel (IV.) angewandt, $m=19$, $p=-\frac{11}{2}$, $a=1$, $b=-1$, $n=2$ setzend, so hätte man erhalten, für $\mu=5$,

$$\int\frac{x^{18}.dx}{(1-x^2)^{\frac{11}{2}}} = -x^{19}.S\left[\frac{10^{a|2}}{(-9)^{a+1|2}}.(1-x^2)^{-\frac{9}{2}+a}\right]_{a+b=4} - \frac{10^{5|2}}{9^{5|-2}}.\int\frac{x^{18}.dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

während das letztere Integral nach (§. 201.) vollends gefunden wird, so daß dieser letztere Weg einfacher ist als der erstere.

Hätte man dagegen $\int\frac{x^{18}.dx}{(1-x^2)^{11}}$ zu finden, so würde (N. 16. Taf. XVII.) für $a=1$, $b=-1$, $p=11$, $m=18$, sogleich geben, wenn man $n=9$ nimmt,

$$\int\frac{x^{18}.dx}{(1-x^2)^{11}} = \frac{-1}{(1-x^2)^{10}}.S\left[\frac{17^{a|-2}}{(-3)^{a+1|-2}}x^{19-2a}\right]_{a+b=8} + \frac{17^{9|-2}}{(-3)^{9|-2}}\int\frac{dx}{(1-x^2)^{11}},$$

wo das erste Aggregat, wegen $a+b=8$, weil also a nach und nach die Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 haben kann und muß, 9 Glieder enthält, während das letztere Integral nach (N. 15.) derselben Tafel noch gefunden werden muß. Diese letztere liefert aber, für $n=10$,

$$\int\frac{dx}{(1-x^2)^{11}} = x\cdot S\left[\frac{19^{a|-2}}{20^{a+1|-2}}\cdot\frac{1}{(1-x^2)^{10-a}}\right]_{a+b=9} + \frac{19^{10|-2}}{20^{10|-2}}\int\frac{dx}{1-x^2},$$

wo das Aggregat, weil a die 10 Werthe 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 hat, 10 Glieder enthält, während

$$\int\frac{dx}{1-x^2} = \tfrac{1}{2}\cdot log\,\frac{1+x}{1-x} = log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

als bekannt angesehen wird, so daß zuletzt, die Formeln der Faktoriellen zu Hilfe nehmend um elegantere Ausdrücke zu erhalten,

$$\int\frac{x^{19}\cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = \frac{1}{(1-x^2)^{10}}\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{17^{a|-2}}{3^{a+1|2}}\cdot x^{19-2a}\right]_{a+b=8}$$
$$-\frac{17^{9|-2}}{19^{9|-2}}\cdot x\cdot S\left[\frac{19^{a|-2}}{20^{a+1|-2}}\cdot\frac{1}{(1-x^2)^{10-a}}\right]_{a+b=9}$$
$$-\frac{17^{10|-2}}{20^{10|-2}}\cdot log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

gefunden wird, welcher Ausdruck zur Rechten 20 Glieder hat, von denen 9 im erstern Aggregat und 10 im andern, so gut als ausgerechnet zu sehen sind.

Wäre endlich $\int\frac{x^{19}\cdot dx}{(1-x^2)^{11}}$ zu finden gewesen, so hätte man nach (N. 16.) der Tafel (XVII.) zunächst erhalten

$$\int\frac{x^{19}\cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = \frac{1}{(1-x^2)^{10}}\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{18^{a|-2}}{2^{a+1|-2}}\cdot x^{18-2a}\right]_{a+b=8} - \frac{18^{9|-2}}{2^{9|2}}\int\frac{x\cdot dx}{(1-x^2)^{11}},$$

während nach (N. 17) derselben Tafel sogleich

$$\int\frac{x\cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = \frac{1}{2\cdot 10\cdot(1-x^2)^{10}}$$

gefunden wird.

Anmerkung. Wenn man sich dieser Formeln auf diese Weise bedienen will, so wird man wohl thun, das Arbeiten mit Faktoriellen etwas einzuüben, weil solches dann viele Erleichterung der Rechnung gewährt. — So ist z. B. nach den Sätzen der Faktoriellen (II. Th. dieses Systems, Kap. XV.)

$$2^{9|2} = 18^{9|-2}, \quad \text{also} \quad \frac{18^{9|-2}}{2^{9|2}} = 1;$$

und eben so ist

$$18^{a|-2} = 2^a \cdot 9^{a|-1}$$

$$2^{a+1|2} = 2^{a+1} \cdot 1^{a+1|1}$$

also $$\frac{18^{a|-2}}{2^{a+1|2}} = \frac{1}{2(a+1)} \cdot \frac{9^{a|-1}}{a!} = \frac{1}{2(a+1)} \cdot 9_a,$$

so daß obige Gleichung wird

$$\int \frac{x^{19} \cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = \frac{1}{(1-x^2)^{10}} \cdot \underset{a+b=8}{S}\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{2(a-1)} \cdot 9_a \cdot x^{18-2a}\right]$$
$$- \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^{10}},$$

während dieses letztere Glied im Aggregat selbst schon steckt, für $a = 9$, so daß noch einfacher

$$\int \frac{x^{19} \cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = \frac{1}{(1-x^2)^{10}} \cdot \underset{a+b=9}{S}\left[(-1)^a \cdot \frac{1}{2a+2} \cdot 9_a \cdot x^{18-2a}\right] \text{*)}$$

hervorgeht.

---

*) Hätte man $1 - x^2 = z$ gesetzt, so wäre $-2x dx = dz$, $x^2 = 1 - z$, $x^{18} = (1-z)^9$, und

$$\int \frac{x^{19} \cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = -\tfrac{1}{2} \int \frac{(1-z)^9 \cdot dz}{z^{11}} \quad \text{erhalten worden.}$$

Weil nun aber nach dem binomischen Lehrsatze

$$(1-z)^9 = \underset{a+b=9}{S}\left[(-1)^a \cdot 9_a \cdot z^a\right] \quad \text{ist,}$$

so ist $$\frac{(1-z)^9 \cdot dz}{z^{11}} = \underset{a+b=9}{S}\left[(-1)^a \cdot 9_a \cdot z^{a-11} \cdot dz\right],$$

demnach $$-\tfrac{1}{2} \int \frac{(1-z)^9 \cdot dz}{z^{11}} = -\tfrac{1}{2} \underset{a+b=9}{S}\left[(-1)^a \cdot 9_a \cdot \frac{z^{a-10}}{a-10}\right].$$

Schluß-Anmerkung.

Um nicht in unnütze Weitläufigkeiten zu verfallen brechen wir hier ab, in der Meinung, daß die vorstehenden Beispiele ausreichen werden, um die praktische Anwendung der Tafeln, namentlich aber der durch Aggregate ausgedrückten Formeln, so viel als solches noch nöthig gewesen seyn konnte, in das Licht zu stellen. — Man wird zu gleicher Zeit in diesen Anwendungen auf's neue erkennen, daß die Bequemlichkeit der Aggregaten-Ausdrücke vorzüglich darin ihren Grund hat, daß man nicht auf Lokalzeichen verwiesen ist (deren Bedeutung zu wissen, jedesmal erst wieder eine Rechnung erfordert), sondern in dem allgemeinen Gliede bereits alle die einzelnen Glieder (besonders bei einiger Uebung) so gut als ausgerechnet erblickt, und diese Bequemlichkeit gewinnt dann doppeltes Gewicht, wenn man von einem so gefundenen Resultat in den Anwendungen nicht alle Glieder gebraucht, sondern nur einzelne, bestimmt herausgehobene, ja selbst hinsichtlich der Stelle noch unbestimmte, weil in dem allgemeinen Gliede des Aggregats selbst, jedes einzelne Glied, und auch jedes der Stelle nach noch unbestimmte, offen da liegt.

Und endlich machen wir noch unsere Leser darauf aufmerksam, daß wenn wir uns auch hier in den Kapiteln über die Integration, beständig der Differenzialzeichen bedient haben (und der $\int$ Zeichen) wir doch immer nur die Ableitungsrechnung und nur die Zurückleitungsrechnung im Auge hatten, den (§§. 150.—152.) zu Folge.

---

oder
$$\int\frac{x^{19}\cdot dx}{(1-x^2)^{11}} = S\left[(-1)^a\cdot 9_a\cdot\frac{1}{(1-x^2)^{10-a}}\cdot\frac{1}{20-2a}\right]$$
$$= \frac{1}{(1-x^2)^{10}}\cdot S\left[(-1)^a\cdot\frac{1}{20-2a}\cdot 9_a\cdot(1-x^2)^a\right]_{a+b=9},$$
welches ebenfalls das Verlangte ist, jedoch in einer andern Form, als das obige.

Anhang.

Einige der wichtigsten

Anwendungen

der

Differenzial- und Integral-Rechnung

auf

Geometrie, Statik und Mechanik.

Zur bessern Erläuterung der vorgetragenen Theorien.

Vorerinnerung.

Dieser Anhang gibt in der ersten Abtheilung eine kurze Uebersicht der gewöhnlichsten Koordinaten-Theorien, nämlich der Polar-Koordinaten und der rechtwinklichen. — Hinsichtlich der größern Gründlichkeit und einer vollkommneren Wissenschaftlichkeit wird auf die „Analytische Geometrie in ihren Elementen, Berlin 1826" verwiesen. — Die zweite Abtheilung enthält die Theorie der Oskulationen (Berührungen), die Rektifikation und die Quadratur der Kurven, die Kubatur der Körper und die Quadratur ihrer Oberfläche; alles aber nur in der Absicht, um das Wesen der vorgetragenen Rechnungen in ihren Anwendungen gehörig hervortreten zu lassen. Als Lehren der Geometrie können diese Untersuchungen in einem spätern Theile dieses Systems in ihrem Zusammenhange ihre befriedigende Erledigung finden. — Die dritte Abtheilung gibt endlich in demselben Sinne und in derselben Absicht einige Anwendungen auf Statik und Mechanik. Auch diese Lehren, als Lehren der Statik und Mechanik, können erst in einem spätern Theile dieses Systems im Zusammenhange so hingestellt werden, wie solches der Wissenschaftsforscher wünschen muß; während sie hier nur als Anwendungen der Rechnungen angesehen, und nur in dieser Beziehung beurtheilt werden dürfen.

Der ganze Anhang endlich gehört nicht zum System und kann daher hier nur als ein Aggregat erläuternder Beispiele der Rechnungen angesehen werden.

Erste Abtheilung.

Wie Linien und Flächen durch Gleichungen vorgestellt werden.

I.

Ein beliebiger Punkt M (Fig. 5.) in einer Ebene wird gewöhnlich auf zwei von einander verschiedene Arten in der Ebene fixirt, nämlich

I. durch Polar-Koordinaten v und r, indem man irgend wo eine feste gerade Linie X_1X zieht, in ihr irgend wo einen festen Punkt F annimmt, und nun Winkel $MFX = v$ und $MF = r$ setzt, wo v gewöhnlich die Abweichung, r der Radius-Vektor, F aber der Pol heißt; — oder

II. durch rechtwinkliche Koordinaten, nämlich durch die Absciſſe $x = MQ = AP$ und Ordinate $y = MP = AQ$, indem man wiederum in der festen Absciſſen-Axe X_1X einen festen Punkt A (Anfangspunkt der Koordinaten) annimmt, durch ihn eine auf X_1X senkrechte Ordinaten-Axe Y_1Y legt, dann von M aus die senkrechten Entfernungen MQ (als Absciſſe) und MP (als Ordinate) nimmt.

Anmerkung. In den Rechnungen setzt man oft statt v die Zahl der Grade, statt r die Zahl der Fuße; dagegen auch statt v die Länge des Bogens für den Radius 1, der zu der

Abweichung MFX gehört. — Eben so unterscheidet man in den Rechnungen mit rechtwinklichen Koordinaten 1) die Koordinaten selbst, 2) die absoluten Zahlen, in welche diese ausgedrückt werden können (die Koordinaten-Maaße), und endlich 3) die mit dem (+) oder (—) Zeichen versehenen Koordinaten-Maaße (welche positive oder negative Zahlen sind, und die Koordinaten-Werthe genannt werden), welche in die Rechnungen gesetzt werden und wodurch die Richtung in Rechnung gebracht wird, nach welcher, von A aus, die Koordinaten zu tragen sind, ob zur Rechten oder zur Linken hin, ob nach oben oder nach unten.

In den nachfolgenden Untersuchungen wird immer vorausgesetzt, daß die positiven Abscissen zur Rechten, und die positiven Ordinaten nach oben hin getragen werden.

Liegt der Punkt M in der Abscissen-Axe selbst, so ist 0 sein Ordinaten-Werth; und liegt er in der Ordinaten-Axe, so ist 0 sein Abscissen-Werth. *)

2.

Da allemal

$$MP = r \cdot Sin\, v \quad \text{und} \quad FP = r \cdot Cos\, v$$

ist, so hat man jedesmal, wenn die Entfernung der festen Punkte A und F, nämlich

$$AF = \alpha$$

gesetzt wird, zwischen den rechtwinklichen Koordinaten x und y, und zwischen den Polar-Koordinaten r und v eines und desselben Punktes M, die Gleichungen

---

*) Die Polar-Koordinaten denkt man sich in der Regel immer positiv und zwar v von 0° bis zu 360°, so daß alle Punkte rings herum durch Werthe von v und r ausgedrückt werden können. Sonst kann man den Punkt M_1 auch dadurch bestimmen, daß man $v = -M_1AX$ setzt (in die Rechnung, statt $v = 360 - M_1AX$), weil in der Regel nur $Sin\, v$ oder $Cos\, v$ vorkommt und in beiden Fällen für $Sin\, v$ und $Cos\, v$ sich ein und derselbe Werth ergibt, man mag $v = -M_1AX$ oder $v = 360° - M_1AX$ nehmen.

$$1)\ x = \alpha + r \cdot Cos\, v$$
$$2)\ y = r \cdot Sin\, v,$$

woraus noch $3)\ (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$ hervorgeht. *)

3.

So wie die Punkte einer Linie in der Ebene nach einem Gesetze fortgehen (und dies muß offenbar immer der Fall seyn, die Linie mag zu den geraden oder krummen gehören), so ist jeder Punkt M derselben, vermöge dieses Gesetzes, in so weit bestimmt, als er zu dieser Linie gehört, und in so weit noch unbestimmt, als noch jeder Punkt der Linie unter ihm verstanden werden kann. Daher muß das Gesetz, nach welchem die Punkte der Linie fortlaufen, zu jeder Abscisse x, die zugehörige Ordinate y, oder zu jeder Abweichung v, den zugehörigen Radius-Vektor r bestimmen. Dasselbe Gesetz muß also jedesmal (analytisch) durch eine Gleichung zwischen x und y, oder durch eine Gleichung zwischen r und v, ausgedrückt werden können. **) — Dies mag in den nächsten Nummern an einigen Beispielen nachgewiesen werden.

4.

Gleichungen einer geraden Linie.

Eine gerade Linie (Fig. 6.) Tt z. B. ist durch 2 Punkte M und N gegeben (M mag die Abscisse x', die Ordinate y', N dagegen die Koordinaten x'' und y'' haben). Für jeden beliebigen Punkt S, dessen Abscissen-Werth $AU = x$, Ordinaten-Werth $SU = y$ ist, hat man nun, eben weil M, S, N in einer gera-

*) Ist $\alpha = 0$, d. h. fallen die festen Punkte A und F in einen und denselben zusammen, so wird noch einfacher

$1)\ x = r \cdot Cos\, v;\quad 2)\ y = r \cdot Sin\, v;\quad 3)\ x^2 + y^2 = r^2.$

**) Hat man die Gleichung zwischen x und y, so erhält man, statt x und y die Werthe aus (N. 2.) setzend, sogleich auch die Gleichung zwischen r und v. — Und hat man letztere, so kann man aus ihr und aus (N. 2. 1. 2.), r und v eliminirend, auch wiederum die Gleichung zwischen x und y ableiten.

den Linie liegen, die ähnlichen Dreiecke MSC, SNE und NMD, während

$$MC = x - x', \; MD = x'' - x', \; SC = y - y' \text{ und } ND = y'' - y'$$

ist; also hat man auch die Proportion

$$y - y' : x - x' = y'' - y' : x'' - x'$$

oder 1) $$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} \cdot (x - x'),$$

welches die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen x und y des beliebigen Punktes S ist, während x', x'', y', y'' als gegebene Ziffernwerthe angesehen werden können.

Ist gegeben der Winkel tTX $= \varphi$, so hat man

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = Tg\varphi,$$

und die Gleichung (1.) nimmt nun die Form

2) $$y - y' = Tg\varphi \cdot (x - x')$$

an, während die gerade Linie, welche sie vorstellt, mit der Abscissen-Axe den Winkel φ bildet und außerdem noch durch den Punkt (x', y') *) hindurch geht.

Betrachtet man die gerade Linie tT als durch AT $= -a$ und W. tTX $= \varphi$ gegeben, so hat man

$$UT = AU + AT = x - a,$$

und $$\frac{SU}{UT} = Tg\varphi \text{ oder } SU = Tg\varphi \cdot UT$$

d. h. 3) $$y = Tg\varphi \cdot (x - a).$$

Und wird AV durch b bezeichnet, so hat man

4) $$y = Tg\varphi \cdot x + b \text{ oder } y - b = Tg\varphi \cdot x.$$

Führt man endlich die Polar-Koordinaten SFX $= v$ und SF $= r$ ein, so erhält man, wenn AF $= \alpha$ ist, nach (N. 2.):

5) $$r \cdot (Sin\, v - Tg\varphi \cdot Cos\, v) = y' + (\alpha - x') \cdot Tg\varphi,$$

---

*) So bezeichnet man den Punkt, dessen Abscissen-Werth x', und dessen Ordinaten-Werth y' ist.

welches die Gleichung derselben geraden Linie zwischen den Polar-Koordinaten r und v ist, welche aber auch auf die Form

$$6)\ r\cdot(Sin\,v - Tg\cdot\varphi\cdot Cos\,v) = r'\cdot(Sin\,v' - Tg\,\varphi\cdot Cos\,v')$$

gebracht werden kann, wenn v′ und r′ die (in Ziffern gegeben gedachten) Polar-Koordinaten des Punktes M oder (x′, y′) sind.

Anmerkung 1. Ist die gerade Linie mit der Abscissen-Axe X_1AX parallel, so ist ihre Gleichung

$$y = 0\cdot x + b,\quad \text{d. h.}\quad y = b.$$

Und ist die gerade Linie mit der Ordinaten-Axe Y_1AY parallel, also senkrecht auf der Abscissen-Axe, so ist ihre Gleichung

$$y = \frac{1}{0}\cdot x - \frac{a}{0},\quad \text{d. h.}\quad 0\cdot y = 1\cdot x - a,$$

nämlich $x = a$.

Anmerkung 2. Auch läßt sich nachweisen, daß jede Gleichung zwischen rechtwinklichen Koordinaten x und y von der Form

$$y = Ax + B \quad \text{oder} \quad ay + bx + c = 0,$$

und jede Gleichung zwischen Polar-Koordinaten r und v von der Form

$$r = \frac{a}{b\cdot Sin\,v + c\cdot Cos\,v},$$

wo A, B, a, b, c, beliebig gegebene reele Werthe vorstellen, allemal die Gleichung einer geraden Linie ist.

5.

Gleichungen einer Kreislinie.

Eine Kreislinie (Fig. 13.) MDE ist gegeben durch ihren Mittel-Punkt C (dessen Koordinaten-Werthe AC′ = a und CC′ = b seyn mögen), und durch den Radius, welcher = ϱ seyn mag. Ist nun für einen beliebigen Punkt M, AP = x, PM = y, so ist

$$CB = x - a, \qquad BM = y - b$$

und allemal $BC^2 + BM^2 = CM^2$, d. h.

$$1)\quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2,$$

wo auch der Punkt M liegen mag; also ist dies die Gleichung der Kreislinie.

Nimmt mann CBZ als Abscissen-Axe, $CB = x_1$, $BM = y_1$, so ſt die Gleichung der Kreislinie

$$2)\quad x_1^2 + y_1^2 = c^2.$$

Nimmt man C als Pol, $MCZ = v$, $MC = r$, so ist

$$3)\quad r = 0 \cdot v + c, \text{ d. h. } r = c$$

die Polar-Gleichung der Kreislinie.

6.

Gleichungen der Ellipse.

Wird von den 2 Endpunkten F und H einer gegebenen Linie FH (Fig. 10.) eine krumme Linie AMB dadurch konstruirt, daß man jeden Punkt M zur Kurve rechnet, für welchen $FM + HM$ eine gegebene Länge 2a hat, so ist

$$1)\quad FM + HM = 2a \quad {}^{*})$$

das (analytisch) ausgesprochene Gesetz dieser Kurve, welche Ellipse genannt wird. — Diese Gleichung (1.) kann man nun umformen in die Gleichung zwischen den rechtwinklichen Koordinaten $AP = x$ und $PM = y$, oder auch in die Gleichung zwischen den Polar-Koordinaten $MFX = v$ und $MF = r$. — Ist z. B. $FH = 2\varepsilon$ gegeben, so hat man im Dreieck MFH, aus $MF = r$, $FH = 2\varepsilon$

*) Weil auch A und B Punkte der Kurve sind, so sind sie durch dasselbe Gesetz entstanden,

d. h. $AF + AH = 2a$

$BF + BH = 2a$

d. h. $2AF + FH = 2a$

$2BF + FH = 2a,$

also $AF = BF.$

Wird daher FH in C halbirt, so ist auch AB in C halbirt und [illegible] auch $AB = 2a$, $AC = CB = a$.

und W. MFH = v nur MH auszudrücken (in r, ε und v) und solchen Werth in (1.) zu substituiren, um dieselbe Gleichung, welche das Gesetz der Ellipse ausspricht, in der gewünschten Form einer Polar-Gleichung ausgedrückt zu haben. Sie wird aber dann

$$2)\quad r = \frac{a^2 - \varepsilon^2}{a - \varepsilon \cdot Cos\, v}.$$

Und da hier AF = a — ε ist, also

$$x = a - \varepsilon + r \cdot Cos\, v \quad \text{und} \quad y = r \cdot Sin\, v,$$

so ergibt sich, wenn man r und v eliminirt, die Gleichung

$$3)\quad y^2 = \frac{a^2 - \varepsilon^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

zwischen den rechtwinklichen Koordinaten x und y, wo ε die Exzentrizität der Ellipse genannt werden kann. *)

Für x = a = AC liefert diese Gleichung $y = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2} = CD$. Man nennt C den Mittelpunkt, CA = a die halbe große Axe, CD = b die halbe kleine Axe, so wie A und B die Scheitel der Ellipse. Man hat also

$$b = \sqrt{a^2 - \varepsilon^2}$$

und die Scheitelgleichung der Ellipse in (3.) läßt sich daher auch noch so ausdrücken, nämlich

$$4)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2).$$

Nimmt man CP = x_1 und PM = y, so erhält man $x = a - x_1$, also aus (4.)

$$5)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x_1^2),$$

welche Gleichung die Mittelpunktsgleichung (zwischen den Koordinaten x_1 und y, welche aus dem Mittelpunkte C genommen sind) der Ellipse genannt wird.

---

*) Der Quozient $\frac{\varepsilon}{a}$ wird ebenfalls oft die Exzentrizität der Ellipse genannt. Wird $\frac{\varepsilon}{a} = e$ gesetzt, so hat man $\varepsilon = ae$; so daß durchgehends dann ae zu setzen ist, wo oben ε steht.

7.

Gleichungen der Hyperbel.

Denkt man sich auf ähnliche Weise (Fig. 11.) jeden Punkt M, m einer Kurve AM, Bm dadurch gegeben, daß, während FH eine gegebene Linie $= 2\varepsilon$, und 2a ebenfalls eine gegebene Linie AB ist,

$$1)\quad HM - FM = 2a$$

oder

$$Fm - Hm = 2a$$

ist, so ist dies das (zu gleicher Zeit analytisch ausgedrückte) Gesetz dieser Kurve, welche Hyperbel genannt wird. Setzt man $AP = x$, $PM = y$, $MFP = v$, $MF = r$, so erhält man auf ähnlichem Wege, wie in der vorigen Nummer, weil jetzt $AF = \varepsilon - a$ ist, als Polar-Gleichung

$$2)\quad r = \frac{\varepsilon^2 - a^2}{a - \varepsilon \cdot Cos\, v},$$

und als Scheitelgleichung (zwischen $AP = x$ und $PM = y$)

$$3)\quad y^2 = \frac{\varepsilon^2 - a^2}{a^2} \cdot (2ax + x^2)$$

oder

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax + x^2),$$

wenn man $\varepsilon^2 - a^2 = b^2$ setzt.

Und nimmt man $AC = a$, $CP = x_1$, also $x = x_1 - a$, so hat man die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel

$$4)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x_1^2 - a^2),$$

indem A, B, die Scheitel, dagegen C der Mittelpunkt der Hyperbel genannt wird, während a die halbe Axe der Hyperbel heißt.

Anmerkung. Die Mittelpunktsgleichungen in dieser und in der vorhergehenden Nummer (6.) lassen bei ihrem bloßen Anblick erkennen, daß die Ellipsen und Hyperbeln, durch die beiden in C sich schneidenden und senkrecht auf einander stehenden Durchmesser (Axen) in 4 kongruente Theile getheilt werden.

8.

Gleichungen der Parabel.

Denkt man sich (Fig. 12.) $AF = AG = \alpha$ genommen, in G eine senkrechte Linie GL auf GX errichtet, und eine Kurve so gebildet, daß für jeden ihrer Punkte M, die mit AX parallele $ML = MF$ wird, so ist die Gleichung

$$1)\quad ML = MF,$$

das (zu gleicher Zeit analytisch ausgedrückte) Gesetz dieser Kurve, welche Parabel genannt wird. — Für $AP = x$, $PM = y$, $MFX = v$, $MF = r$, hat man aus (1.)

$$2)\quad r = x + \alpha$$

während

$$x = \alpha + r \cdot Cos\, v, \qquad y = r \cdot Sin\, v \qquad \text{ist,}$$

so daß die Gleichung (2.) in die Polar-Gleichung der Parabel

$$3)\quad r = \frac{2\alpha}{1 - Cos\, v}$$

übergeht, während, wenn man r und v eliminirt, die Scheitelgleichung (zwischen $AP = x$, $PM = y$, wo der Punkt A Scheitel genannt wird) der Parabel

$$4)\quad y^2 = 4\alpha \cdot x$$

hervorgeht.

Anmerkung. Der Punkt F heißt dabei der Brennpunkt der Parabel. In (N. 6. u. 7.) heißen die Punkte F und H die Brennpunkte (der Ellipse oder der Hyperbel).

9.

Gleichungen der Konchoide oder Muschellinie.

Werden von C aus (Fig. 14.) beliebige Linien CE, CG, CK, ꝛc. gezogen, und dann von einer Linie AB aus die Stücken DE, FG, HK, ꝛc. alle einander gleich und $= a$ gemacht, so bekommt man die Konchoide EGK. Nimmt man CE senkrecht auf AB als Abscissen-Axe, $CD = b$, $EN = x$, $NG = y$, so hat man

haben wird, so wird durch Einführung neuer Axen nach (N. 19.) die neue Gleichung zwischen t und u für dieselben Kurven gefunden, nämlich $\psi_{t,u} = 0$, welche Gleichung aber hier ebenfalls die Form der 2ten Ordnung

2) $A_1 \cdot u^2 + B_1 \cdot tu + C_1 \cdot t^2 + D_1 \cdot u + E_1 \cdot t + F_1 = 0$

annimmt, und dann, der (N. 19.) zu Folge, $B_1 = 0$, $D_1 = 0$, $F_1 = 0$ setzend, auf die Form

$$u^2 = \alpha t + \beta t^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = \alpha x + \beta x^2$$

gebracht werden kann, wo β positiv die Hyperbel, β negativ die Ellipse, $\beta = 0$ aber die Parabel anzeigt, während die Gleichung von der Form

3) $y^2 = \alpha x + \beta x^2$

gewöhnlich die Scheitelgleichung der Kegelschnitte (der Linien der 2ten Ordnung) genannt wird, und, wie man sieht, nicht mehr und nicht weniger Kurven liefert, und auch keine anderen, als diejenigen, welche durch die allgemeinste (sechsgliedrige) Gleichung (1.) der 2ten Ordnung, vorgestellt sind.

Für $x = 0$ wird auch aus (3.) $y = 0$, d. h. der Anfangspunkt der Koordinaten ist selbst ein Punkt der Kurve. — Für $y = 0$ gibt die (3.) $x = 0$ und $x = -\frac{\alpha}{\beta}$, wodurch der 2te Punkt bestimmt ist, in welchem die Kurve von der Ab-

---

$B^2 - 4AC$ negativ seyn sollte; sie hat endlich 2 unendliche Schenkel und heißt Parabel, wenn $B^2 - 4AC = 0$ seyn sollte.

Dies findet sich sogleich, wenn man die Gleichung (1.) nach y auflöst, also

$$y = \frac{-Bx - D \pm \sqrt{(B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + D^2 - 4AF}}{2A}$$

findet, und nun die Werthe von y betrachtet, unter der Voraussetzung, daß x sehr groß und immer größer und größer und unendlich groß, übrigens allemal positiv und auch negativ genommen wird, in so ferne y dann immer reel oder immer imaginär, oder auf der einen Seite reel auf der andern dagegen imaginär werden wird.

scissen-Axe geschnitten wird. Ist $\beta = 0$ (also in der Parabel), so findet kein solcher zweiter Durchschnittspunkt statt.

Legt man (im Falle β nicht 0 ist) also in der Ellipse oder Hyperbel (Fig. 10. oder Fig. 11., wo AX und AY die Axen sind, wo also $AB = \mp\frac{\alpha}{\beta}$ ist), gerade in der Mitte zwischen diesen beiden Durchschnittspunkten A und B, der Kurve mit der Abscissen-Axe, also durch den Punkt C, dessen Abscisse $= -\frac{\alpha}{2\beta}$ ist, eine neue Ordinaten-Axe CY', parallel mit der alten AY, nennt man die neue Abscisse CP, $= x_1$, für denselben Punkt M der Kurve, dessen alte Abscisse AP, $= x$ genannt worden war, so hat man

$$x = x_1 - \frac{\alpha}{2\beta};$$

und wenn man diesen Werth in die Gleichung (3.) substituirt, so erhält man

$$4)\ y^2 = \beta x_1^2 - \frac{\alpha^2}{4\beta} = \frac{\alpha^2}{4(-\beta)} - (-\beta)x_1^2$$

als die Gleichung zwischen x_1 und y für dieselbe Kurve; welche Gleichung die Mittelpunktsgleichung der Ellipse oder Hyperbel genannt wird, weil, wie die Form der jetzigen Gleichung (4.) sehen läßt, diese neuesten Axen offenbar die Kurve selbst in 4 kongruente Theile theilen, so daß der jetzige Anfangspunkt C der Koordinaten mit Recht der Mittelpunkt genannt werden kann. — Und in dieser Gleichung (4.) zeigt noch immer β positiv die Hyperbel, β dagegen negativ (d. h. $-\beta$ positiv) die Ellipse an.

22.

Um die Kegelschnitte (d. h. die Linien der 2ten Ordnung) noch ein klein wenig weiter zu verfolgen, so kann man nun aus der Gleichung (3.)

$$y^2 = \alpha x + \beta x^2,$$

welche noch jede mögliche Kurve dieser Ordnung vorstellt, den Punkt F suchen (dadurch daß man $AF = \mathfrak{x}$ sucht), welcher die Eigenschaft hat, daß (Figg. 10. 11. u. 12.)

$$\text{FM} = \sqrt{\text{FP}^2 + \text{PM}^2} = \sqrt{(x - \mathfrak{x})^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{(1+\beta)x^2 - (2\mathfrak{x} - \alpha)x + \mathfrak{x}^2}$$

für jedes unbestimmt gelassene x oder AP, d. h. für jeden beliebigen Punkt M der Kurve, in x **razional** werde, d. h. daß dieses FM von der Form $px + q$, also dann

$$1)\quad \text{FM} = \sqrt{1+\beta}\cdot x \pm \mathfrak{x}$$

werde (so daß x selbst nicht mehr unter dem Wurzelzeichen erscheint). Dies ist nach (I. Th. dieses Systems §. 257.) dann der Fall, wenn

$$(\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \mathfrak{x}\cdot(1+\beta) \quad \text{oder} \quad \beta\mathfrak{x}^2 + \alpha\mathfrak{x} = \tfrac{1}{4}\alpha^2 \quad \text{ist,}$$

woraus
$$\mathfrak{x} = -\frac{\alpha}{2\beta} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4\beta} \pm \frac{\alpha^2}{4}} = \frac{-\alpha[1 \mp \sqrt{1+\beta}]}{2\beta}$$

für die Ellipse und Hyperbel, oder

$$\mathfrak{x} = \tfrac{1}{4}\alpha$$

für die Parabel (wo $\beta = 0$ ist) hervorgeht.

In der Ellipse und Hyperbel (Figg. 10. u. 11.) existiren also zwei solche Punkte F und H, so daß

$$\text{AF} = \frac{-\alpha\cdot[1 - \sqrt{1+\beta}]}{2\beta},\quad \text{AH} = \frac{-\alpha\,[1 + \sqrt{1+\beta}]}{2\beta},$$

folglich

$$\text{FH} = \pm\frac{\alpha}{2\beta}\cdot\sqrt{1+\beta} \quad \text{und}$$

$$\text{CF} = \text{CH} = \text{CA} \pm \text{AF} = \frac{\sqrt{1+\beta}}{2\beta} \quad \text{ist,}$$

wo man nur hinsichtlich der (+ oder —) Zeichen darauf zu sehen hat, daß alle Linien absolut (positiv) werden.

Diese Punkte F und H heißen die **Brennpunkte** der Ellipse (Fig. 10.) oder der Hyperbel (Fig. 11.); so wie der einzige Punkt F, für welchen (Fig. 12.)

$$\text{AF} = \tfrac{1}{4}\alpha$$

gefunden werden ist, ebenfalls der **Brennpunkt** der Parabel heißt.

Da von diesen Brennpunkten aus die Linien FM und HM sich für jedes M, also für jedes x, in x razional ausdrücken lassen, so zwar, daß

$$FM \text{ oder } HM = \sqrt{1+\beta}\cdot x \pm r$$

ist, so gewähren diese Punkte Resultate, wodurch sie sich von allen übrigen Punkten in der Abscissen-Axe unterscheiden. Namentlich ist in der Ellipse (Fig. 10.) allemal

$$FM + HM = AB,$$

in der Hyperbel dagegen (Fig. 11.)

bald $HM - FM = AB,$

bald $Fm - Hm = AB,$

während in der Parabel (wo man $y^2 = \alpha x$ hat)

jedesmal $FM = x + \frac{1}{4}\alpha$ ist. *)

Anmerkung 1. Man ist übrigens gewohnt, AB (Fig. 10. oder 11.) durch 2a zu bezeichnen und die große Axe (der Ellipse oder Hyperbel) zu nennen, so wie $CF = CH$ durch ae, wo e die Exzentrität (der Ellipse oder der Hyperbel) genannt wird. Dann hat man also

$$AB = \mp\frac{\alpha}{\beta} = 2a \text{ und } CF = CH = \frac{-\alpha\sqrt{1+\beta}}{2\beta} = ae,$$

woraus $\sqrt{1+\beta} = e$, $\beta = e^2 - 1$, $\alpha = \mp 2a(1-e^2)$ folgt, so daß dann die Scheitelgleichung $y^2 = \alpha x + \beta x^2$ jetzt in

$$y^2 = (1-e^2)\cdot(\pm 2ax - x^2)$$

übergeht, welche Gleichung die Ellipse gibt, wenn $e < 1$, und das (+) Zeichen von 2ax genommen wird, die Hyperbel dage-

*) In den Nummern (6.—8.) wurden Kurven gesucht, welche gerade diese Eigenschaften haben sollten, und da wir dort bloß Gleichungen der 2ten Ordnung erhalten haben, so folgt umgekehrt, daß nur der Ellipse, der Hyperbel und der Parabel diese Eigenschaften zukommen, daß also jeder dieser Kegelschnitte durch diese Eigenschaft wiederum völlig bestimmt und gegeben ist.

gen, wenn $e > 1$ ist, und wenn man das (—) Zeichen von $2ax$ nimmt. *)

Bezeichnet man, wenn $e < 1$ ist, $a^2 - a^2e^2$ durch b^2, dagegen wenn $e > 1$, die umgekehrte Differenz $a^2e^2 - a^2$ durch b^2, so hat man die Scheitelgleichung der Ellipse

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2),$$

dagegen die Scheitelgleichung der Hyperbel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax + x^2);$$

während die Gleichung der Ellipse für $x = AC = a$, $y = b$ liefert, so daß $b = CD = CE$ ist, also b die halbe kleine Axe der Ellipse vorstellt. (Das b in der Gleichung der Hyperbel entspricht keiner solchen zweiten Axe).

Die Mittelpunktsgleichungen werden dann

für die Ellipse: $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a^2 - x_1^2) = (1 - e^2)(a^2 - x_1^2)$

für die Hyperbel: $y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (x_1^2 - a^2) = (e^2 - 1)(x_1^2 - a^2)$.

Anmerkung 2. Nach dieser Betrachtung eines Systems von Punkten, welche alle in einer und derselben Ebene liegen, gehen wir zu der Betrachtung solcher Systeme von Punkten über, welche sich beliebig im Raume verbreiten.

23.

Um einen Punkt M (Fig. 20.) im Raume zu fixiren, denkt man sich 3 auf einander senkrechte Koordinaten-Ebenen, XAY, XAZ, YAZ, welche sich in 3 auf einander senkrechten Koordinaten-Axen AX, AY und AZ schneiden, und bestimmt nun M durch dessen 3 senkrechte Entfernungen

---

*) Man kann auch hier das (+) Zeichen nehmen und man wird noch die Hyperbel erhalten, jedoch auf die Ordinaten-Axe bezogen, welche durch den Punkt B geht, übrigens auf AB senkrecht steht.

$$MM_1 = M_3P_2 = M_2P_1 = AP_3 = z \quad \text{von } XAY$$
$$MM_2 = M_1P_1 = M_3P_3 = AP_2 = y \quad \text{von } XAZ$$
und $$MM_3 = M_1P_2 = M_2P_3 = AP_1 = x \quad \text{von } YAZ.$$

Dabei ist

$$AM_1 = \sqrt{x^2+y^2};\ AM_2 = \sqrt{x^2+z^2};\ AM_3 = \sqrt{y^2+z^2};$$
$$AM = \sqrt{x^2+y^2+z^2};$$
$$Cos\,MAX = \frac{x}{AM};\quad Cos\,MAY = \frac{y}{AM};\quad Cos\,MAZ = \frac{z}{AM};$$

und deshalb auch

$$Cos\,MAX^2 + Cos\,MAY^2 + Cos\,MAZ^2 = 1.$$

24.

Und ist N ein zweiter Punkt im Raume, gegeben durch die 3 Koordinaten-Werthe x_1, y_1, z_1, so hat man noch

$$AN = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$$

und $$MN = \sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2};\ ^{*)}$$

$$Cos\,NAX = \frac{x_1}{AN};\quad Cos\,NAY = \frac{y_1}{AN};\quad Cos\,NAZ = \frac{z_1}{AN};$$

so wie dann noch

$$Cos\,MAN = Cos\,MAX \cdot Cos\,NAX + Cos\,MAY \cdot Cos\,NAY + Cos\,MAZ \cdot Cos\,NAZ;$$

d. h. $$Cos\,MAN = \frac{x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1}{AM \cdot AN}.\ ^{**)}$$

---

*) Man sieht dies am besten ein, wenn man sich durch M neue Axen-Ebenen denkt, parallel mit den alten, wo denn M der Anfangspunkt der neuen Koordinaten wird, während letztere gegen die alten beziehlich um x, y, z vermindert seyn werden. Natürlich wird dann MN genau so gefunden, wie in der vorigen Nummer bereits AM und jetzt wieder AN gefunden war.

**) Es ergibt sich dies aus der Gleichung der ebenen Trigonometrie

$$Cos\,MAN = \frac{MA^2 + NA^2 - MN^2}{2 \cdot MA \cdot NA}.$$

25.

Jede Gleichung $\varphi_{x,y,z} = 0$ zwischen x, y und z liefert zu jedem beliebig angenommenen x und y, ein zugehöriges z. Eine solche Gleichung muß allemal existiren, so oft x, y, z die Koordinaten-Werthe der einzelnen Punkte einer beliebigen Fläche vorstellen. — Diese Flächen werden wieder eingetheilt in algebraische und in transzendente, und die algebraischen wieder in Flächen der ersten Ordnung, gegeben durch die allgemeine Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

und dies sind allemal ebene Flächen; dann in Flächen der zweiten Ordnung, gegeben durch die allgemeine Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Kz + L = 0;$$

dann in Flächen der 3ten und der höhern Ordnungen.

26.

Die Gleichung einer Ebene, welche durch einen gegebenen Punkt (α, β, γ) hindurchgeht, hat allemal die Form

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + C(z-\gamma) = 0,$$

weil sie nicht bloß von der ersten Ordnung seyn, sondern auch $z = \gamma$ liefern muß, so oft $x = \alpha$ und $y = \beta$ gesetzt wird.

27.

Die Gleichung einer Ebene, welche auf der Koordinaten-Ebene XAY senkrecht steht, muß die Form

$$Ax + By + 0 \cdot z + D = 0, \quad \text{d. h.} \quad Ax + By + D = 0$$

haben; und wenn sie auch durch den gegebenen Punkt (α, β, γ) hindurchgehen soll, so muß ihre Gleichung die Form

$$A(x-\alpha) + B(y-\beta) + 0 \cdot (z-\gamma) = 0, \text{ d. h. } A(x-\alpha) + B(y-\beta) = 0$$

haben.

28.

Sucht man die Punkte auf, in welchen zwei durch die Gleichungen

$$1)\ \varphi_{x,y,z} = 0 \quad \text{und} \quad 2)\ \psi_{x,y,z} = 0$$

gegebene Flächen sich schneiden, so sind in ihnen nicht bloß die beiden x und die beiden y, sondern auch noch die beiden z dieselben; also darf man nur die beiden Gleichungen (1. u. 2.) für dieselben x, y und z gelten lassen, und sie geben y und z in x ausgedrückt, so daß diese beiden Gleichungen in ihrer Vereinigung, unter dieser Voraussetzung, eine Linie im Raume vorstellen, und zwar die Durchschnittslinie der beiden durch jede Gleichung einzeln vorgestellten Fläche.

29.

Man kann dies benutzen, um eine gerade Linie im Raume durch Gleichungen zwischen den Koordinaten-Werthen x, y, z ihrer einzelnen Punkte auszudrücken. Man legt nämlich durch die Linie zwei Ebenen und drückt dann jede dieser Ebenen durch eine Gleichung zwischen x, y und z aus.

Unter den unendlich vielen Paaren von Ebenen, welche durch die gerade Linie gelegt werden können, nimmt man gewöhnlich diejenige, welche zugleich auf der Koordinaten-Ebene XAY und diejenige, welche zugleich auf der Koordinaten-Ebene XAZ senkrecht steht, so daß die gerade Linie selbst durch zwei Gleichungen von der Form

$$1)\quad y = ax + b \qquad \text{und} \quad 2)\quad z = px + q$$

ausgedrückt wird. — Soll dabei die gerade Linie noch durch den Punkt (α, β, γ) hindurchgehen, so haben ihre beiden (zusammengehörigen) Gleichungen die Form

$$3)\ y - \beta = a \cdot (x - \alpha) \quad \text{und} \quad 4)\ z - \gamma = p \cdot (x - \alpha),$$

welche Gleichungen allemal auch die Gleichungen der Projektionen dieser Linien auf die Ebenen XAY und XAZ sind. *)

---

*) Die Lehre der Projektionen findet man in dem 3ten Bande der „reinen Elementar-Mathematik, Berlin 1826," im achten Kapitel gehörig ausführlich und vollständig, in ihren Elementen, enthalten.

30.

Da gerade Linien unter sich parallel sind, sobald die beiden Paare von Projektionen dieser Linien, auf zwei (Koordinaten-) Ebenen, unter sich parallele Linien sind, so ist danach sehr leicht der Parallelismus gerader Linien im Raume zu erkennen. — Schneiden sich aber die beiden durch

$$1)\begin{cases} y = ax + b, \\ z = px + q, \end{cases} \quad \text{und} \quad 2)\begin{cases} y = a_1x + b_1 \\ z = p_1x + q_1 \end{cases}$$

gegebenen geraden Linien im Raume, so sind im Durchschnittspunkte die x, y, z in allen 4 Gleichungen dieselben; also geben diese Gleichungen nicht nur diese Koordinaten-Werthe x, y, z des Durchschnittspunktes (wenn solche existiren), sondern auch noch eine Bedingungsgleichung zwischen den Koeffizienten a, b, p, q, a_1, b_1, p_1, q_1, welche erfüllt seyn muß, wenn ein Durchschnittspunkt existiren soll.

31.

Sind aber

$$y = ax + b, \qquad z = px + q$$

die Gleichungen für eine gerade Linie im Raume, so sind

$$y = ax, \qquad z = px$$

die Gleichungen für eine, durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehende, mit der erstern parallele gerade Linie. Und sind α_1, β_1, γ_1 die 3 Winkel, welche diese Linie mit den Axen AX, AY, AZ macht, so hat man nach (N. 23.)

$$Cos\,\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2+p^2}}; \quad Cos\,\beta_1 = \frac{a}{\sqrt{1+a^2+p^2}};$$

$$Cos\,\gamma_1 = \frac{p}{\sqrt{1+a^2+p^2}}.$$

Sind dann

$$y = a_1x + b_1, \qquad z = p_1x + q_1$$

die Gleichungen einer zweiten geraden Linie, also

$$y = a_1x, \qquad z = p_1x$$

die Gleichungen der mit ihr parallelen, aber durch den Anfangspunkt der Koordinaten hindurchgehenden Geraden, und sind α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche letztere mit den Axen AX, AY und AZ machen, so hat man nach (N. 23.)

$$Cos\,\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1+a_1{}^2+p_1{}^2}}, \quad Cos\,\beta_2 = \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1{}^2+p_1{}^2}},$$

$$Cos\,\gamma_2 = \frac{p_1}{\sqrt{1+a_1{}^2+p_1{}^2}}.$$

Aber eben deshalb ist nun auch, wenn δ der Winkel ist, den die beiden geraden Linien unter sich machen, nach (N. 24.),

$$Cos\,\delta = \frac{1+a\cdot a_1+p\cdot p_1}{\sqrt{1+a^2+p^2}\cdot\sqrt{1+a_1{}^2+p_1{}^2}};$$

und die Linien selbst stehen auf einander senkrecht, wenn $Cos\,\delta = 0$ d. h. wenn $1+a\cdot a_1+p\cdot p_1 = 0$ ist.

32.

Sucht man die Linie, in welcher die durch die Gleichung

$$Ax+By+Cz+D = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_{x,y,z} = 0$$

gegebene Ebene oder krumme Fläche die Koordinaten-Ebenen XAY, XAZ, YAZ trifft, so setzt man bloß abwechselnd z, y und x, = 0, so daß die Gleichungen dieser 3 Durchschnittslinien (Grundschnitte genannt)

$$Ax+By+D = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_{x,y,0} = 0,$$
$$Ax+Cz+D = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_{x,0,z} = 0,$$
$$By+Cz+D = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_{0,y,z} = 0$$

seyn werden.

33.

Da eine gerade Linie auf einer Ebene

$$1) \quad Ax+By+Cz+D = 0$$

senkrecht steht, so oft ihre Projektion auf dem zugehörigen Grundschnitte der Ebene senkrecht steht, wenigstens in zweien der Koordinaten-Ebenen, so folgen hieraus

$$2)\ \begin{cases} Ay - Bx + E = 0 \\ Az - Cx + F = 0 \end{cases}$$

als die Gleichungen aller der geraden Linien, welche auf der Ebene (1.) senkrecht stehen.

Und soll unter allen diesen geraden Linien diejenige genommen werden, welche durch den Punkt (α, β, γ) geht, so sind ihre beiden Gleichungen

$$\begin{Bmatrix} A(y-\beta) - B(x-\alpha) = 0 \\ A(z-\gamma) - C(x-\alpha) = 0 \end{Bmatrix}.$$

34.

Zwei Ebenen bilden unter sich denselben Neigungswinkel, welchen die auf ihnen senkrechten Linien unter sich bilden. *) — Sind daher

$$1)\ A\ (x-\alpha) + B\ (y-\beta) + C\ (z-\gamma) = 0,$$

$$2)\ A_1(x-\alpha) + B_1(y-\beta) + C_1(z-\gamma) = 0$$

die Gleichungen zweier Ebenen, so sind

$$3)\ \begin{cases} A\ (y-\beta) - B\ (x-\alpha) = 0 \\ A\ (z-\gamma) - C\ (x-\alpha) = 0 \end{cases}$$

und

$$4)\ \begin{cases} A_1(y-\beta) - B_1(x-\alpha) = 0 \\ A_1(z-\gamma) - C_1(x-\alpha) = 0 \end{cases}$$

die Gleichungen für zwei auf jenen Ebenen (1. u. 2.) beziehlich senkrechten Linien. Ist daher δ der Winkel, den jene Ebenen unter sich, oder diese Linien unter sich machen, so hat man nach (N. 30)

$$Cos\,\delta = \frac{A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}};$$

und die Ebenen stehen daher auf einander senkrecht, so oft

$$A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1 = 0 \quad \text{ist.}$$

---

*) Anfänger werden über solche Sätze den schon angeführten 3ten Theil der „kleinen Elementar-Mathematik, Berlin 1826," zu Hilfe nehmen.

Anmerkung. Da zwei Ebenen unter si[illegible]llel sind, wenn ihre Grundschnitte mit jeder von zwei Koord[illegible]ten-Ebenen unter sich parallel sind, so ergeben sich die Bedingungen paralleler Ebenen, analytisch in ihren Gleichungen ausgesprochen, augenblicklich und von selbst.

35.

Wird eine beliebige durch die Gleichung

$$\varphi_{x,y,z} = 0$$

gegebene Fläche durch eine Ebene geschnitten, welche parallel mit der Koordinaten-Ebene YAZ läuft und von letzterer um $x = \mathfrak{x}$ absteht; so ist dieser Schnitt eine krumme Linie, gegeben durch dieselbe Gleichung

$$1) \quad \varphi_{\mathfrak{x},y,z} = 0,$$

zwischen den Koordinaten y und z in der Schnittebene selber genommen, den bestimmten Werth $\mathfrak{x}$ statt x gesetzt.

Eben so sind

$$2) \quad \varphi_{x,\mathfrak{y},z} = 0 \quad \text{und} \quad 3) \quad \varphi_{x,y,\mathfrak{z}} = 0$$

die Gleichungen zweier Schnitte, welche beziehlich parallel mit den Koordinaten-Ebenen XAZ und XAY, uud von letzteren beziehlich um $y = \mathfrak{y}$ und $z = \mathfrak{z}$ entfernt liegen. Die Koordinaten x und z in (2.) sind dann in der Schnittebene selber zu nehmen, so wie die Koordinaten x und y in (3.) in dieser Schnittebene selber genommen werden müssen.

Anmerkung. Die (krummen) Flächen der 2ten Ordnung (N. 25.) haben daher die Eigenschaft, daß alle ihre mit den Axen-Ebenen parallelen Schnitte Linien der 2ten Ordnung sind. Und führt man neue Axen-Ebenen ein, so wird die Gleichung zwischen den drei neuen Koordinaten noch immer von der 2ten Ordnung seyn; also ist auch jeder Schnitt durch eine beliebige Ebene allemal eine Linie der 2ten Ordnung.

Zweite Abtheilung.

Einige Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung auf Geometrie.

36.

Um die Ableitungsrechnung bequem und sicher anzuwenden, kann man folgenden Satz vorausschicken:

Wenn R ein Ausdruck ist, der von h abhängig, aber für jeden auch noch so kleinen Werth von h, allemal zwischen zwei andern Ausdrücken G und K liegt (d. h. kleiner ist wie der eine, zugleich aber größer wie der andere), die ebenfalls von h abhängen; wenn ferner R sowohl, als auch G und K nach positiven (ganzen oder gebrochenen) und steigenden Potenzen von h fortlaufend dargestellt werden, und wenn dann die Reihen für G und K mit einerlei erstem Gliede anfangen, so muß auch R mit demselben ersten Gliede anfangen.

Ist also z. B.

$$G = G_1 \cdot h^\alpha + G_2 \cdot h^\beta + G_3 \cdot h^\gamma + \cdots\cdot$$

und $$K = G_1 \cdot h^\alpha + K_2 \cdot h^\beta + K_3 \cdot h^\gamma + \cdots\cdot$$

und $$R = R_1 \cdot h^\alpha + R_2 \cdot h^\beta + R_3 \cdot h^\gamma + \cdots\cdot,$$

so ist nothwendig

$$R_1 = G_1.$$

Denn es ist, wenn $R < G$ aber $R > K$, auch $G - K > G - R$

d. h. $(G_2 - K_2) \cdot h^\beta + (G_3 - K_3) \cdot h^\gamma \cdots > (G_1 - R_1) \cdot h^\alpha + (R_2 - R_2) \cdot h^\beta + \cdots$

d. h. wenn man durch h^α wegdividirt

$$(G_2 - K_2) \cdot h^{\beta-\alpha} + (G_3 - K_3) \cdot h^{\gamma-\alpha} + \cdots$$
$$> (G_1 - R_1) + (G_2 - R_2) \cdot h^{\beta-\alpha} + (G_3 - R_3) \cdot h^{\gamma-\alpha} + \cdots,$$

welches für ein im Moment des Verschwindens gedachtes h nur möglich seyn könnte, wenn

$$G_1 - R_1 \text{ negativ oder Null}$$

wäre.

In so ferne aber der Voraussetzung zu Folge auch

$$G-K>R-K$$ seyn müßte,

hätte man noch

$$(G_2-H_2)\cdot h^{\beta-\alpha}+(G_3-H_3)\cdot h^{\gamma-\alpha}+\cdots$$
$$>(R_1-G_1)+(R_2-K_2)\cdot h^{\beta-\alpha}+(R_3-K_3)\cdot h^{\gamma-\alpha}+\cdots,$$

welches für ein im Moment des Verschwindens gedachtes h wiederum nicht möglich wäre, wenn nicht

R_1-G_1 negativ (d. h. G_1-R_1 positiv) oder Null

ist. — Da nun G_1-R_1 nicht negativ und positiv zugleich seyn kann, so bleibt bloß noch, wenn die gemachten Voraussetzungen statt finden,

$$G_1=R_1$$ übrig.

Anmerkung. Bei den Anwendungen der Methode der Grenzen dagegen wird nachstehender Satz von Wichtigkeit: Wenn Q_h und S_h zwei Ausdrücke sind, zwischen denen ein dritter V_h der Größe nach immer liegt, wie klein auch h gedacht werden möge; und wenn an der Grenze des Werthes von h, d. h. für $h=0$, die Ausdrücke Q_h und S_h einander gleich und $=L$ werden, so muß auch das dazwischen liegende V_h für $h=0$ diesem Werthe L gleich werden.

Genau genommen ist aber dieser Satz gerade der hier eben in der Nummer (36.) entwickelte, nur in einer andern Form hingestellt; wie besonders deutlich in die Augen fällt, wenn man $\frac{G}{h^\alpha}=Q_h$, $\frac{K}{h^\alpha}=S_h$, so wie $\frac{R}{h^\alpha}=V_h$ setzt, wo dann offenbar $L=G_1$ wird.

37.

Zu Gunsten der leichtern und bequemern Anwendung der Differenzial-Rechnung und der Methode der Grenzen, thut man wohl noch folgende Betrachtung vorauszuschicken.

Sind M, M', M'', M''' (Fig. 19.) Punkte einer durch

$$F_{x,y}=[illegible] \quad \text{oder} \quad y=y_x$$

gegebenen Kurve, welche [illegible]ch zu den Abscissen

$$AP=x,\quad AP'=x+h,\quad AP''=x+2h,\quad AP'''=x+3h$$

gehören, so sind die Ordinaten

$PM = y_x$, $P'M' = y_{x+h}$, $P''M'' = y_{x+2h}$, ꝛc. ꝛc.

Zieht man dann MN' $M'N''$, $M''N'''$, ꝛc. mit AX parallel, ferner $M'O''$ mit $N'N''$, $M''O'''$ mit $N''N'''$, ꝛc., auch wiederum $M''Q'''$ mit $O''O'''$ ꝛc parallel, so hat man offenbar, den Taylor'schen Lehrsatz zu Hilfe nehmend:

1) $$M'N' = y_{x+h} - y_x = \partial y_x \cdot h + \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$$M''N'' = y_{x+2h} - y_{x+h} = \partial y_x \cdot h + 3 \cdot \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + 7 \cdot \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots;$$

also auch

2) $$M''O'' = 2\partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + 6 \cdot \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots = \partial^2 y_x \cdot h^2 + \cdots;$$

ferner ist

$$M'''N''' = y_{x+3h} - y_{x+2h} = \partial y_x \cdot h + 5 \cdot \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + 19 \cdot \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

$$M'''O''' = 2 \cdot \partial^2 y_x \cdot \frac{h^2}{2!} + 12 \cdot \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots,$$

also hieraus

3) $$M'''Q''' = 6 \cdot \partial^3 y_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots = \partial^3 y_x \cdot h^3 + \cdots,$$

u. s. w. f.

Anmerkung. Denkt man sich aber zuletzt h im Moment des Verschwindens und $= dx$, so erhält man aus (1. 2. 3.), wenn man die höhern Potenzen von dx, im Geiste der Differenzial-Rechnung, außer Acht läßt,

1) $M'N' = \partial y \cdot dx = dy$,

2) $M''O'' = \partial^2 y \cdot dx^2$ [illegible] y,

3) $M'''Q''' = \partial^3 y \cdot dx^3$ [illegible] y, u. s. w. f.,

so daß man auf diese Weise die Differenzialien dy, d^2y, d^3y, ꝛc. versinnlicht erblickt.

Von den Oskulationen oder den Berührungen.

38.

Zwei Linien (Kurven) oskuliren sich an einem Punkte, wenn sie 1) diesen Punkt mit einander gemein haben; und wenn 2) die diesem Punkte nächst anliegenden Punkte in beiden Kurven einander so nahe liegen, als ihnen solches möglich ist. — Dieses Oskuliren wird Berühren genannt, wenn beide dem gemeinschaftlichen Punkt nächst anliegenden Punkte der einen Kurve auf einer und derselben Seite der andern Kurve liegen; — es ist dagegen ein Schneiden, wenn der nächst vorhergehende Punkt der einen Kurve diesseits, der nächst folgende Punkt derselben aber jenseits der andern Kurve liegt.

Sind $y = \varphi_x$ und $y = \psi_x$ die beiden Kurven, so müssen also, soll für $x = \alpha$ ein Oskuliren statt finden, die beiden y für $x = \alpha$, dieselben werden, damit die Kurven diesen Punkt mit einander gemein haben; es muß also seyn

$$1)\quad \varphi_x = \psi_x \quad \text{für } x = \alpha.$$

Die diesen Ordinaten φ_x und ψ_x nächst vorhergehende und nächst folgende Ordinaten sind ausgedrückt durch

$$\varphi_{x+h} \text{ oder } \varphi_x + \partial\varphi_x \cdot h + \partial^2\varphi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3\varphi_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots\cdot$$

$$\text{und}\quad \psi_{x+h} \text{ oder } \psi_x + \partial\psi_x \cdot h + \partial^2\psi_x \cdot \frac{h^2}{2!} + \partial^3\psi_x \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots\cdot,$$

wenn nur zuletzt immer α statt x gesetzt wird, und wenn man h bald negativ, bald positiv, jedesmal aber im Moment des Verschwindens nimmt. Der Unterschied dieser, in beiden Kurven zu $x = \alpha + h$ gehörigen Ordinaten, ist also

$$D = (\partial\varphi_x - \partial\psi_x) \cdot h + (\partial^2\varphi_x - \partial^2\psi_x) \cdot \frac{h^2}{2!} + (\partial^3\varphi_x - \partial^3\psi_x) \cdot \frac{h^3}{3!} + \cdots\cdot,$$

welcher Unterschied D zwar ebenfalls im Moment des Verschwin-

dens, aber doch so geordnet ist, daß jedes folgende Glied selber wieder gegen sein nächst vorhergehendes Glied im Moment des Verschwindens sich befindet, weil z. B.

$$Ph^2 + Qh^3 = h^2 \cdot (P + Q \cdot h)$$

geschrieben werden kann, wo Qh gegen P im Moment des Verschwindens ist. — Hat man also noch

$$2) \quad \partial\varphi_x = \partial\psi_x \quad \text{für } x = \alpha,$$

so fängt dieser Unterschied D erst mit dem Gliede $(\partial^2\varphi_x - \partial^2\psi_x) \cdot \frac{h^2}{2}$ an, ist daher gegen vorher, wo er mit der ersten Potenz von h anfing, wiederum im Moment des Verschwindens, und man sagt nun: „die Kurven oskuliren sich in dem fraglichen Punkt in der ersten Ordnung," und diese ist eine Berührung. Ist dagegen auch noch

$$3) \quad \partial^2\varphi_x = \partial^2\psi_x \quad \text{für } x = \alpha,$$

so ist der gedachte Unterschied D abermals gegen den vorigen im Moment des Verschwindens, und die Kurven haben nun eine Oskulation der 2ten Ordnung, welche aber dasmal ein Schneiden ist. — Und ist noch außerdem

$$4) \quad \partial^3\varphi_x = \partial^3\psi_x \quad \text{für } x = \alpha,$$

so haben die Kurven eine Oskulation der dritten Ordnung, und diese ist wiederum ein Berühren.

Ueberhaupt; — sind alle Ableitungen von φ_x und ψ_x für $x = \alpha$, einander gleich, bis einschließlich zu $\partial^n\varphi_x = \partial^n\psi_x$, so haben die Kurven eiue Oskulation der nten Ordnung, und der Unterschied D oder $\varphi_{x+h} - \psi_{x+h}$ fängt erst mit der Potenz h^{n+1} an, ändert daher mit h zugleich sein (+) oder (—) Zeichen nicht, wenn n ungerade ist; daher ist diese Oskulation der nten Ordnung ein Berühren, wenn n ungerade, ein Schneiden, wenn n gerade.

39.

Sollte, während die eine dieser Gleichungen $y = \varphi_x$ völlig bestimmt und gegeben ist, die andere $y = \psi_x$ noch μ unbe-

stimmte Koeffizienten a, b, c rc. rc. enthalten (welche Parameter dieser Kurve genannt werden), so kann man diese so bestimmen, daß sie die Gleichungen

$$\varphi_x = \psi_x,\ \partial\varphi_x = \partial\psi_x,\ \partial^2\varphi_x = \partial^2\psi_x, \ldots \partial^{\mu-1}\varphi_x = \partial^{\mu-1}\psi_x$$

für $x = \alpha$ identisch machen, so daß dann die zweite, ihrer Art nach gegebene Kurve $y = \psi_x$ (d. h. deren Gleichung der Form nach gegeben, aber wegen der unbestimmten Parameter noch übrigens unbestimmt ist) so bestimmt wird, daß sie mit der gegebenen Kurve an dem zur Abscisse α gehörigen Punkt eine Oskulation der $\mu - 1$ ten Ordnung hat.

40.

Nimmt man, um dies mit einigen Beispielen zu erläutern, als Gleichung der zweiten Kurve (also statt $y = \psi_x$) die Gleichung der geraden Linie

$$y = Ax + B$$

mit den beiden unbestimmten Parametern A und B, so hat man $Ax + B$ statt ψ_x, so wie A statt $\partial\psi_x$, also daß die Gleichungen der Oskulation, nämlich:

$$\varphi_x = \psi_x \quad \text{und} \quad \partial\varphi_x = \partial\psi_x,$$

in

$$\varphi_x = Ax + B \quad \text{und} \quad \partial\varphi_x = A$$

übergehen, mithin $B = \varphi_x - x \cdot \partial\varphi_x$ wird, für $x = \alpha$.

Läßt man für das bestimmt gedachte, aber doch noch beliebige α, x selbst stehen, und unterscheidet man die Koordinaten-Werthe der gesuchten berührenden geraden Linie, von denen x, y der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ dadurch, daß man x_1 und y_1 statt x und y in $y = Ax + B$ setzt, so findet sich diese Gleichung der geraden Linie, welche mit der gegebenen Kurve

$$y = \varphi_x,$$

und zwar an dem Punkte, dessen Abscisse $= x$ ist, eine Oskulation der ersten Ordnung (Berührung) hat, offenbar

$$y_1 = \partial\varphi_x \cdot x_1 + (\varphi_x - x \cdot \partial\varphi_x)$$

oder $\quad y_1 - \varphi_x = \partial\varphi_x \cdot (x_1 - x)$

oder $\quad$ I. $\; y_1 - y = \partial y_x \cdot (x_1 - x)$,

wenn y, ∂y_x statt φ_x, $\partial\varphi_x$ stehen.

Diese durch die Gleichung (I.) zwischen den Koordinaten-Werthen x_1 und y_1 ihrer einzelnen Punkte gegebene gerade Linie, nennt man die (geradlinige) Tangente der Kurve $y = \varphi_x$, an dem Punkt dieser Kurve, dessen Abscisse $= x$ ist.

41.

Ist (Figg. 10. oder 11.) M der Punkt (x,y), MT die durch die Gleichung

$$1) \quad y_1 - y = \partial y_x \cdot (x_1 - x)$$

gegebene Tangente der Kurve, und MW senkrecht auf MT, deshalb die Normale genannt, so ist die Gleichung dieser Normale nach (N. 17.)

$$2) \quad y_2 - y = -\frac{1}{\partial y_x} \cdot (x_2 - x),$$

unter x_2, y_2 die Koordinaten-Werthe der einzelnen Punkte der Linie MW verstanden. — Und für $y_1 = 0$ giebt die Gleichung (1.) nach (N. 20.)

$$PT = \pm (x_1 - x) = \pm \frac{y}{\partial y_x},$$

d. h. Subtangente $PT = \pm \frac{y}{\partial y_x} = \pm y : \frac{dy}{dx} = \pm \frac{y \cdot dx}{dy}$.

Für $y_2 = 0$ gibt dagegen die Gleichung (2.)

$$PW = \pm (x_2 - x) = \pm y \cdot \partial y_x,$$

d. h. Subnormale $PW = \pm y \cdot \partial y_x = \pm \frac{y \cdot dy}{dx}$,

wo unter dem zweifelhaften (+ oder —) Zeichen allemal dasjenige genommen werden muß, welches für PT und PW positive Werthe liefert, *) weshalb man diese (±) Zeichen im Schreiben auch weglassen kann.

---

*) Aus der Betrachtung der drei rechtwinklichen Dreiecke MPT,

Beispiel. 1. Für die **Parabel** (Fig. 12.), deren Gleichung

$$y^2 = \alpha x$$

ist, wird auf diese Weise, weil aus dieser Gleichung durch differenziiren

$$2y \cdot \partial y_x = \alpha$$

hervorgeht, die *Subn* PW $= \frac{1}{2}\alpha$, und *Subtg* PT $= \frac{2y^2}{p} = 2x$ gefunden. *)

Beispiel 2. Für die Ellipse (Fig. 10.), deren Gleichung (N. 22. Anmerk.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$$

gefunden worden war, findet sich durch differenziiren dieser Gleichung

$$y \cdot \partial y_x = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a - x);$$

also *Subn* PW $= \pm \frac{b^2(a-x)}{a^2}$; *Subtg* PT $= \pm \frac{a^2 y^2}{b^2(a-x)}$,

wo das (+) Zeichen gilt, so lange $x < a$, das (−) dagegen, sobald $x > a$ ist. **)

MPW und TMW, folgt auch noch

$$PT : PM = PM : PW$$

d. h.

$$Subtg : y = y : Subnorm.$$

*) Verbindet man diese Eigenschaft der Tangente an M mit der Eigenschaft des Brennpunktes F, nach welcher FM $= x + \frac{1}{4}\alpha$ ist, so folgt

$$FM = FW = FT = x + \tfrac{1}{4}\alpha;$$

folglich W. UMt = W. FMT,

so daß also jeder parallel mit AX einfallende Strahl UM in den Brennpunkt F zurückgeworfen wird, weshalb gerade F diesen Namen hat.

**) Verbindet man diese Eigenschaft der Tangente mit den Eigenschaften der Brennpunkte F und H, so kann man FM, FW, HM, HW, FT, HT, PC, CT, in b, a und x ausdrücken, und durch Vergleichung dieser Ausdrücke erhält man dann die Proportionen

$$CP : CA = CA : CT,$$
$$FM : FT = HM : HT,$$
$$FM : FW = HM : HW;$$

und aus dieser letztern Proportion folgt dann wieder

W. FMW = W. HMW,

Beispiel 3. Für die Hyperbel (Fig. 11.) deren Gleichung (N. 22. Anmerk.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax + x^2)$$

gefunden war, hat man zunächst

$$y \cdot \partial y_x = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a + x);$$

und dann $Subn\,PW = \pm \frac{b^2}{a^2} \cdot (a+x)$; $Subtg\,PT = \pm \frac{a^2 y^2}{b^2 (a+x)}$; wo das (+) Zeichen gilt, so lange x positiv, das (—) Zeichen dagegen, wenn x und a + x negativ werden. *)

Beispiel 4. Giebt man die Kurve, wie (N. 10.) die Zykloide (Fig. 15.), durch 2 Gleichungen

$$1)\ x = t - r \cdot Sin\frac{t}{r} \quad \text{und} \quad 2)\ y = r - r \cdot Cos\frac{t}{r},$$

aus denen erst t eliminirt werden muß, um die wahre Gleichung zwischen x und y zu haben, so kann man auch, will oder kann man die Elimination nicht statt finden lassen, noch den Satz anwenden, daß

$$\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}$$

ist, und deshalb die beiden Gleichungen (1. u. 2.) nach allem t differenziiren, um diese ∂y_t, ∂x_t zu erhalten. Man findet dann, weil diese Gleichungen nach t identisch sind, sobald x und y die durch sie bestimmten Funktionen von t vorstellen

$$3)\ \partial x_t = 1 - Cos\frac{t}{r}, \qquad 4)\ \partial y_t = Sin\frac{t}{r};$$

also

---

so daß deshalb jeder Strahl, der von dem einen Brennpunkt H der Ellipse ausgeht, von der Kurve nach dem andern Brennpunkt F hin zurückgeworfen wird, woher gerade diese Punkte F und H ihre Namen hergeholt haben.

*) Die vorliegenden Proportionen

$$CP : CA = CA : CT,$$
$$FM : FT = HM : HT$$

und

$$FM : FW = HM : HW$$

gelten auch für die Hyperbel (Fig. 11.), weshalb auch daselbst noch

$$W.\ HMT = W.\ FMT \quad \text{ist.}$$

$$5)\quad \partial y_x = \frac{Sin\frac{t}{r}}{1-Cos\frac{t}{r}} = Cotg\frac{t}{2r},$$

folglich

$$6)\quad Subn\,PW = r\cdot Sin\frac{t}{r} = \sqrt{2ry-y^2} = MR = PE;\ ^{*)}$$

$$7)\quad Subtg\,PT = r\cdot\frac{\left(1-Cos\frac{t}{r}\right)^2}{Sin\frac{t}{r}} = 2r\cdot\left(Sin\frac{t}{2r}\right)^2\cdot Tg\frac{t}{2r}$$

$$= \frac{y^2}{\sqrt{2ry-y^2}}.$$

Anmerkung. Uebrigens mag man nicht übersehen, daß jeder Punkt (in jedem bestimmten Zweig) der Kurve eine völlig bestimmte berührende gerade Linie hat; d. h. eine völlig bestimmte Tangente, eben so eine einzige und völlig bestimmte Normale (der Richtung nach); dagegen zu gleicher Zeit unendlich viele Subtangenten und unendlich viele zugehörige Subnormalen, weil letztere für jedes andere Axen-Paar, welches zu Grunde gelegt wird, anders sind; obgleich sie immer beziehlich $y:\partial y_x$ und $y\cdot\partial y_x$ seyn werden, sobald, auf dieses Axen-Paar bezogen, x und y die Koordinaten-Werthe der Kurve sind.

42.

Soll der Kreis bestimmt werden, der eine gegebene Kurve $y=\varphi_x$ osskulirt (oder berührt), so ist die andere Kurve $y=\psi_x$, jetzt die des Kreises, d. h. nach (N. 5.) die Gleichung

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = c^2$$

oder

$$y = b\pm\sqrt{c^2-(x-a)^2}$$

(wo a und b die Koordinaten-Werthe des Mittelpunktes, c dagegen der Radius des Kreises ist). — Man hat also jetzt

*) Die in der (Fig. 15.) angemerkte Normale MW fällt also, da W in den Punkt E fallen muß, mit der Sehn ME des Kreises EMF zusammen.

$$b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2} \quad \text{statt} \quad \psi_x,$$

$$\mp \frac{x-a}{\sqrt{c^2-(x-a)^2}} \quad \text{oder} \quad -\frac{x-a}{\psi_x - b} \quad \text{statt} \quad \partial\psi_x$$

und $\qquad \mp \frac{c^2}{(\psi_x - b)^3} \qquad$ statt $\partial^2\psi_x$;

und die Gleichungen

$$\varphi_x = \psi_x, \quad \partial\varphi_x = \partial\psi_x, \quad \partial^2\varphi_x = \partial^2\psi_x,$$

welche zu einer Oskulation der 2ten Ordnung gehören, gehen jetzt über in

1) $\varphi_x = b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$,

2) $\partial\varphi_x = \mp \frac{x-a}{\sqrt{c^2-(x-a)^2}} = -\frac{x-a}{\varphi_x - b}$,

3) $\partial^2\varphi_x = \mp \frac{c^2}{(\psi_x - b)^3} = \mp \frac{c^2}{(\varphi_x - b)^3}$

für $x = \alpha$; und dienen zur Bestimmung der noch unbestimmt gedachten Parameter a, b, c, d. h. der Lage des Mittelpunktes und der Länge des Radius dieses oskulirenden Kreises. — Wenn man die Gleichung $y = \psi_x$ in $y_1 = \psi_{x_1}$ d. h. in $y_1 = b \pm \sqrt{c - (x_1 - a)^2}$ oder $(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 = c^2$ umschreibt, damit unter x und y allemal bloß die Koordinaten-Werthe der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$, und zwar die des Punktes, in welchem die Oskulation statt finden soll, verstanden werden können, so daß man dann auch bloß y_x oder y statt φ_x, bloß ∂y_x oder ∂y statt $\partial\varphi_x$, und bloß $\partial^2 y_x$ oder $\partial^2 y$ statt $\partial^2\varphi_x$ schreiben kann, — so nehmen die 3 Gleichungen (1.—3.) leicht folgende Gestalten an:

4) $y - b = -\frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y}$ oder $b = y + \frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y}$,

5) $x - a = \frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y} \cdot \partial y$ oder $a = x - \frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y} \cdot \partial y$,

6) $c = \frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y}$;

in welchen Gleichungen zur Rechten, da y, ∂y, $\partial^2 y$ lauter, durch

φ_x, $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$ vorgestellte und bekannte Funktionen von x sind, bloß x erscheint, während dieses x als eine bestimmte Abscisse gedacht wird, für einen Punkt der Kurve $y = \varphi_x$, an welchem die Oskulation mit dem, seiner Lage und seiner Größe nach gesuchten Kreise statt finden soll.

Diesen eben gefundenen Kreis, welcher an einem zu $x = x$ gehörigen Punkte der, durch $y = \varphi_x$ gegebenen Kurve, eine Oskulation der 2ten Ordnung hat (welche allemal ein Schneiden ist) nennt man den Krümmungskreis der Kurve an dieser Stelle; seinen Halbmesser c (aus 6. aber nothwendig allemal absolut d. h. positiv zu finden), nennt man den Krümmungshalbmesser an dieser Stelle.

Beispiel 1. Für die Parabel deren Gleichung

$$y^2 = px$$

ist, findet sich durch differenziiren

$$2y \cdot \partial y_x = p;$$

und nochmals differenziirend, und wenn durch 2 dividirt wird:

$$y \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 = 0,$$

also $\qquad \partial y_x = \frac{p}{2y}, \qquad \partial^2 y_x = -\frac{\partial y^2}{y} = -\frac{p^2}{4y^3},$ *)

folglich der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y} = -\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = -\frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}},$$

wo jedoch das (—) Zeichen im Schreiben auch weggelassen werden konnte, da man weiß, daß der Krümmungshalbmesser doch positiv seyn muß, so daß also statt der 2deutigen $(4x+p)^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt{p}$ doch noch immer die Werthe gesetzt werden müssen, welche das Ganze positiv machen.

Beispiel 2. Für die Ellipse, deren Scheitelgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$$

---

*) Hier konnte man auch direkt aus $y^2 = px$ leicht finden

$$y = p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}},$$

also $\qquad \partial y = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}, \qquad \partial^2 y = -\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{3}{2}}.$

ist, findet man durch zweimaliges differenziiren

$$y \cdot \partial y = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a-x)$$

und $$\partial y^2 + y \cdot \partial^2 y = -\frac{b^2}{a^2};$$

folglich daraus

$$\partial y = \frac{b^2(a-x)}{a^2 y}; \quad \partial^2 y = -\frac{b^2}{a^2 y}\left(1 + \frac{b^2(a-x)^2}{a^2 y^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3};\ ^{**})$$

also der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(1+\partial y)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y} = -\frac{[a^4 y^2 + b^4(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2 [a^2 y^2 + b^2(a-x)^2]} = \frac{[a^4 y^2 + b^4(a-x)^2]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4},$$

wo auch hier wieder das (—) Zeichen im Schreiben weggelassen werden konnte.

Beispiel 3. Für die (N. 9.) durch die Gleichung

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \cdot \sqrt{2ax - x^2}$$

gegebene Konchoide findet man zunächst

$$\partial y = \frac{(x-a)^2(a+b-x) + b(2ax-x^2)}{(x-a)^2 \cdot \sqrt{2ax-x^2}};$$

daraus, wenn man nochmals differenziirt, $\partial^2 y$, und daraus den Krümmungshalbmesser

$$= \frac{a \cdot [(a-x)^4 + 2b(a-x)^3 + a^2 b^2)]^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^3 \cdot [(a-x)^3 + 3b(a-x)^2 - 2a^2 b]};$$

während für dieselbe Konchoide, wo (Fig. 14.) $EN = x$, $NG = y$ ist,

$$Subtg\, NT = \frac{y}{\partial y} = \frac{(a-x)(a+b-x)(2ax-x^2)}{a^2 b + (a-x)^3}.$$

**) Auch hier konnte man sogleich in aufgelöster Gestalt schreiben

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

und daraus direkt finden

$$\partial y = \frac{b \cdot (a-x)}{a \cdot \sqrt{2ax - x^2}},$$

so wie noch

$$\partial^2 y = -\frac{ab}{(\sqrt{2ax - x^2})^3},$$

alle Ableitungszeichen (∂) nach x genommen.

und

$$Subn\, NW = y \cdot \partial y = \frac{(a+b-x) \cdot [a^2 b + (a-x)^3]}{(a-x)^3}$$

gefunden wird. *)

Um noch mehre der frühern Lehren der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung in Anwendung zu bringen, wollen wir hier einmal annehmen, es wäre die Konchoide durch die Polar-Gleichung (N. 9.)

$$1)\ r = a + \frac{b}{Cos\, v} \quad \text{oder} \quad (r-a) \cdot Cos\, v = b$$

gegeben, während dann

$$2)\ y = r \cdot Sin\, v \qquad \text{und} \quad 3)\ x = a + b - r \cdot Cos\, v$$

die Gleichungen sind, welche zwischen den Polar-Koordinaten r und v und zwischen den rechtwinklichen x und y eines und desselben Punktes G der Kurve (Fig. 14.) statt finden. — Da man nun zwischen r, v, x, y, 3 Gleichungen hat, aus denen r und v eliminirt werden kann, so bleibt y noch immer eine gegebene Funktion von x, so daß ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ebenfalls dadurch bestimmte Funktionen von x sind. Will man nun diese letztern (nämlich ∂y_x, $\partial^2 y_x$) finden, ohne jedoch y in x selbst haben zu wollen, so muß man bedenken, daß durch vorstehende Gleichungen (1.—3.) r, v und y als diejenigen Funktionen von x gegeben sind, welche

---

*) Auch hier konnte die Gleichung der Konchoide in verwickelter Gestalt

$$(a-x)^2 \cdot y^2 = (a+b-x)^2 (2ax - x^2)$$

gegeben seyn. Dann konnte man durch zweimaliges differenziiren (nach allem x) erhalten

$$(a-x)^2 \cdot y \cdot \partial y - (a-x) \cdot y^2$$
$$= (a+b-x)^2 (a-x) - (a+b-x)(2ax - x^2),$$

und $(a-x)^2 \cdot (\partial y^2 + y \cdot \partial^2 y) - 4(a-x) \cdot y \cdot \partial y + y^2$
$$= -4(a+b-x)(a-x) - (a+b-x)^2 + 2ax - x^2;$$

und dann konnte man hieraus ∂y und $\partial^2 y$ finden, anfänglich in y und x ausgedrückt, während jedoch wiederum y in x gegeben ist.

alle 3 Gleichungen zugleich identisch machen. Differenziirt man daher alle 3 Gleichungen nach allem x, oder noch besser nach allem t, indem man nämlich x selber wieder, und somit auch y, r und v als Funktionen von t ansieht, so erhält man:

aus (1.) .... 4) $\partial r = \frac{b \cdot Sin\, v \cdot \partial v}{Cos\, v^2}$;

aus (2.) .... 5) $\partial y = Sin\, v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v$;

aus (3.) .... 6) $\partial x = -Cos\, v \cdot \partial r + r \cdot Sin\, v \cdot \partial v$;

woraus dann, wenn $\partial x = 1$ d. h. $t = x$ genommen wird, d. h. wenn die Ableitungen alle nach x genommen werden, ∂r und ∂v eliminirt, und ∂y d. h. ∂y_x gefunden werden kann, nämlich

$$\text{(A.)} \ldots \quad \partial y_x = \frac{b \cdot Sin\, v^2 + r \cdot Cos\, v^3}{Cos\, v \cdot (-b \cdot Sin\, v + r \cdot Sin\, v \cdot Cos\, v)}.$$

Man kann aber auch den Satz anwenden, nach welchem

$$\text{(B.)} \ldots \quad \partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{Sin\, v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v}{-Cos\, v \cdot \partial r + r \cdot Sin\, v \cdot \partial v}$$

ist, wenn man aus (5. u. 6.) für ∂y_t und ∂x_t die daselbst gefundenen Werthe substituirt. Zuletzt kann aus (4.) der Werth von ∂r in (B.) statt ∂r gesetzt werden, so fällt ∂v von selbst weg, so daß man dasselbe Resultat (A.) erhält.

Um nun $\partial^2 y_x$ unter den gegenwärtigen Voraussetzungen zu finden, müßte man die Gleichungen (4.—6.) nach allem x differenziiren, in (6.) vorher 1 statt ∂x setzend; dann erhielte man

$$\text{aus (4.)} \ldots \; 7)\; \partial^2 r = \frac{b \cdot Sin\, v \cdot \partial^2 v}{Cos\, v^2} + \frac{b \cdot \partial v^2}{Cos\, v} + 2\frac{b \cdot Sin\, v^2 \cdot \partial v^2}{Cos\, v^3};$$

$$\text{aus (5.)} \ldots \; 8)\; \partial^2 y = Sin\, v \cdot \partial^2 r + 2\, Cos\, v \cdot \partial v \cdot \partial r - r \cdot Sin\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Cos\, v \cdot \partial^2 v;$$

$$\text{aus (6.)} \ldots \; 9)\quad 0 = -Cos\, v \cdot \partial^2 r + 2 Sin\, v \cdot \partial v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Sin\, v \cdot \partial^2 v;$$

aus welchen Gleichungen (7.—9.) in Verbindung mit (4.—6.) nicht bloß ∂r, $\partial^2 r$, ∂v, $\partial^2 v$ eliminirt, sondern auch ∂y, $\partial^2 y$ (alle nach x genommen, also ∂y_x, $\partial^2 y_x$) gefunden werden können.

43.

Da diese Rechnungen nicht ohne einige Mühe durchgeführt werden, so würde man, sollte bloß der Krümmungshalbmesser gefunden werden, diesen, wenn er $= \gamma$ gesetzt wird, weil

$$1)\quad \gamma = \frac{(1+\partial y_x{}^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} \quad \text{ist,}$$

lieber (nach dem 3ten Kap.) so umformen, daß er statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, lieber ∂y, ∂x, $\partial^2 y$, $\partial^2 x$, nach einem beliebigen neuen Veränderlichen t (oder v oder r ꝛc.) genommen, enthielte. Weil aber nach (§. 59.)

$$\partial y_x = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \partial^2 y_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3} \quad \text{ist,}$$

so erhält man

$$2)\quad \gamma = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}.$$

Ist dann 3) $y = r \cdot Sin\, v$ und 4) $x = \alpha - r \cdot Cos\, v$,

also

$$5)\quad \partial y = \quad Sin\, v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v,$$

$$6)\quad \partial x = -Cos\, v \cdot \partial r + r \cdot Sin\, v \cdot \partial v,$$

so wird

$$7)\quad \partial x^2 + \partial y^2 = \partial r^2 + r^2 \cdot \partial v^2.$$

Und differenzirt man (5. u. 6.) auf's neue, so wird noch

$$8)\quad \partial^2 y = \quad Sin\, v \cdot \partial^2 r + 2\, Cos\, v \cdot \partial v \cdot \partial r - r \cdot Sin\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Cos\, v \cdot \partial^2 v,$$

$$9)\quad \partial^2 x = -Cos\, v \cdot \partial^2 r + 2\, Sin\, v \cdot \partial v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Sin\, v \cdot \partial^2 v;$$

woraus dann

$$10)\quad \partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x = r \cdot (\partial v \cdot \partial^2 r - \partial r \cdot \partial^2 v) - (r^2 \partial v^2 + 2 \partial r^2) \cdot \partial v$$

hervorgeht, so daß, wenn diese Werthe aus (7.) und (10.) in (2.) substituirt werden, der Krümmungshalbmesser

$$11)\ \gamma = \frac{(\partial r^2 + r^2 \cdot \partial v^2)^{\frac{3}{2}}}{r \cdot (\partial v \cdot \partial^2 r - \partial r \cdot \partial^2 v) - (r^2 \cdot \partial v^2 + 2\partial r^2) \cdot \partial v}$$

hervorgeht.

Da hier die Ableitungen nach allem t verstanden sind, so kann man auch $t = v$ nehmen, wo denn $\partial v_t = 1$, und $\partial^2 v_t = 0$ wird, und es wird dann

$$12)\ \gamma = \frac{(\partial r^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{r \cdot \partial^2 r - r^2 - 2\partial r^2},$$

wo alle ∂ auf v sich beziehen, d. h. wo ∂r und $\partial^2 r$ statt ∂r_v und $\partial^2 r_v$ stehen.

Beispiel 1. Wird dann eine Gleichung der Kurve zwischen ihren Polar-Koordinaten gegeben, z. B. die der Konchoide

$$1)\ r = a + \frac{b}{Cos\, v} \quad \text{oder} \quad (r-a) \cdot Cos\, v = b,$$

so erhält man, nach v differenziirend,

$$2)\ Cos\, v \cdot \partial r - (r-a) \cdot Sin\, v = 0$$

und $3)\ Cos\, v \cdot \partial^2 r - 2 Sin\, v \cdot \partial r - (r-a) \cdot Cos\, v = 0,$

woraus dann ∂r und $\partial^2 r$ leicht gefunden, und ihre Werthe selbst in (12.) substituirt werden können, um den Krümmungshalbmesser γ in r und v ausgedrückt zu haben, d. h. in den Polar-Koordinaten des Punktes, für dessen nächste Umgebung die Krümmung gesucht wird.

Beispiel 2. Nehmen wir als neues Beispiel, den Krümmungshalbmesser zu finden, die Gleichungen (N. 10.) für die Zykloide, nämlich

$$1)\ x = t - r \cdot Sin\frac{t}{r} \quad \text{und} \quad 2)\ y = r - r \cdot Cos\frac{t}{r},$$

welche, wenn man t eliminirt, die Gleichung zwischen rechtwinklichen Koordinaten x und y liefert. Will man nun den Krümmungshalbmesser finden, jedoch ohne die Elimination von t wirklich vorzunehmen, so sind x und y als die Funktionen von t anzusehen, welche die Gleichungen (1. u. 2.) identisch machen; also erhält man, wenn man (1. u. 2.) nach allem t differenzirt,

$$3)\ \partial x = 1 - Cos\frac{t}{r}; \qquad 4)\ \partial y = Sin\frac{t}{r};$$

$$5)\ \partial^2 x = \frac{1}{r} \cdot Sin\frac{t}{r}; \qquad 6)\ \partial^2 y = \frac{1}{r} \cdot Cos\frac{t}{r};$$

folglich

$$\partial x^2 + \partial y^2 = 2 - 2\,Cos\frac{t}{r} = 2\left(1 - Cos\frac{t}{r}\right) = 4\cdot\left(Sin\frac{t}{2r}\right)^2$$

und $\partial x\cdot\partial^2 y - \partial y\cdot\partial^2 x = \frac{1}{r}\cdot Cos\frac{t}{r} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}\left(1 - Cos\frac{t}{r}\right)$

$$= -\frac{2}{r}\cdot\left(Sin\frac{t}{2r}\right)^2.$$

Substituirt man daher diese Werthe in (N. 43. 2.), so erhält man den Krümmungshalbmesser

$$\gamma = \pm 4r\cdot Sin\frac{t}{2r} = 2r\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - Cos\frac{t}{r}} = 2\sqrt{2ry},$$

während die $\sqrt{2ry}$ als die mittlere Proportionale anzusehen ist, zwischen dem Durchmesser 2r des beschreibenden Kreises und der Ordinate y, so daß für den Punkt M (Fig. 15.)

$\gamma = 2\cdot EM$ wird.

44.

Würde der Kreis gesucht, welcher mit der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ (Fig. 12.) an einem Punkt M eine Oskulation der ersten Ordnung hat (welche dasmal ein Berühren ist), so dürfte man bloß die beiden y und die beiden ∂y_x, der Kurve $y = \varphi_x$ und der Kreislinie

$(y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2$ oder $y = b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$,

einander gleich nehmen, für $x = \alpha$; so daß man bloß die Gleichungen (1. u. 2.) der (N. 42.), nicht mehr aber die Gleichung (3. der N. 42.), also nur die beiden Gleichungen

1) $\varphi_x = b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$ oder $(\varphi_x - b)^2 + (x-a)^2 = c^2$

und

2) $\partial\varphi_x = -\frac{x-a}{\varphi_x - b}$ oder $(\varphi_x - b)\cdot\partial\varphi_x + (x-a) = 0$

zur Bestimmung der 3 Parameter a, b, c hätte. Einer der Parameter z. B. a (der Abscissenwerth des Mittelpunktes) bliebe daher willkührlich, während zu jedem beliebig angenommenen a, die beiden andern Parameter b und c aus (1. und 2.) sich völlig bestimmten. — Es existiren also unendlich viele Kreise, welche alle an der Stelle M (Fig. 12.) mit der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ eine Oskulation der ersten Ordnung haben, unter denen

$$y_1 = \partial\varphi_x \cdot x_1 + (\varphi_x - x \cdot \partial\varphi_x)$$

oder $$y_1 - \varphi_x = \partial\varphi_x \cdot (x_1 - x)$$

oder $$\text{I.}\quad y_1 - y = \partial y_x \cdot (x_1 - x),$$

wenn y, ∂y_x statt φ_x, $\partial\varphi_x$ stehen.

Diese durch die Gleichung (I.) zwischen den Koordinaten-Werthen x_1 und y_1 ihrer einzelnen Punkte gegebene gerade Linie, nennt man die (geradlinige) Tangente der Kurve $y = \varphi_x$, an dem Punkt dieser Kurve, dessen Abscisse $= x$ ist.

41.

Ist (Figg. 10. oder 11.) M der Punkt (x, y), MT die durch die Gleichung

$$1)\quad y_1 - y = \partial y_x \cdot (x_1 - x)$$

gegebene Tangente der Kurve, und MW senkrecht auf MT, deshalb die Normale genannt, so ist die Gleichung dieser Normale nach (N. 17.)

$$2)\quad y_2 - y = -\frac{1}{\partial y_x} \cdot (x_2 - x),$$

unter x_2, y_2 die Koordinaten-Werthe der einzelnen Punkte der Linie MW verstanden. — Und für $y_1 = 0$ giebt die Gleichung (1.) nach (N. 20.)

$$PT = \pm(x_1 - x) = \pm\frac{y}{\partial y_x},$$

d. h. Subtangente $PT = \pm\frac{y}{\partial y_x} = \pm y : \frac{dy}{dx} = \pm\frac{y \cdot dx}{dy}$.

Für $y_2 = 0$ gibt dagegen die Gleichung (2.)

$$PW = \pm(x_2 - x) = \pm y \cdot \partial y_x,$$

d. h. Subnormale $PW = \pm y \cdot \partial y_x = \pm\frac{y \cdot dy}{dx}$,

wo unter dem zweifelhaften (+ oder —) Zeichen allemal dasjenige genommen werden muß, welches für PT und PW positive Werthe liefert, *) weshalb man diese (±) Zeichen im Schreiben auch weglassen kann.

*) Aus der Betrachtung der drei rechtwinklichen Dreiecke MPT,

Beispiel. 1. Für die **Parabel** (Fig. 12.), deren Gleichung

$$y^2 = \alpha x$$

ist, wird auf diese Weise, weil aus dieser Gleichung durch differenziiren

$$2y \cdot \partial y_x = \alpha$$

hervorgeht, die *Subn* PW $= \frac{1}{2}\alpha$, und *Subtg* PT $= \frac{2y^2}{p} = 2x$ gefunden. *)

Beispiel 2. Für die Ellipse (Fig. 10.), deren Gleichung (N. 22. Anmerk.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot (2ax - x^2)$$

gefunden worden war, findet sich durch differenziiren dieser Gleichung

$$y \cdot \partial y_x = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a - x);$$

also *Subn* PW $= \pm \frac{b^2(a-x)}{a^2}$; *Subtg* PT $= \pm \frac{a^2y^2}{b^2(a-x)}$,

wo das (+) Zeichen gilt, so lange $x < a$, das (−) dagegen, sobald $x > a$ ist. **)

MPW und TMW, folgt auch noch

$$PT : PM = PM : PW$$

d. h. $\quad$ *Subtg* : y = y : *Subnorm*.

*) Verbindet man diese Eigenschaft der Tangente an M mit der Eigenschaft des Brennpunktes F, nach welcher FM $= x + \frac{1}{4}\alpha$ ist, so folgt

$$FM = FW = FT = x + \tfrac{1}{4}\alpha;$$

folglich $\quad$ W. UMt = W. FMT,

so daß also jeder parallel mit AX einfallende Strahl UM in den Brennpunkt F zurückgeworfen wird, weshalb gerade F diesen Namen hat.

**) Verbindet man diese Eigenschaft der Tangente mit den Eigenschaften der Brennpunkte F und H, so kann man FM, FW, HM, HW, FT, HT, PC, CT, in b, a und x ausdrücken, und durch Vergleichung dieser Ausdrücke erhält man dann die Proportionen

$$CP : CA = CA : CT,$$

$$FM : FT = HM : HT,$$

$$FM : FW = HM : HW;$$

und aus dieser letztern Proportion folgt dann wieder

W. FMW = W. HMW,

Beispiel 3. Für die Hyperbel (Fig. 11.) deren Gleichung (N. 22. Anmerk.)

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax + x^2)$$

gefunden war, hat man zunächst

$$y\cdot\partial y_x = \frac{b^2}{a^2}\cdot(a+x);$$

und dann $Subn\,PW = \pm\frac{b^2}{a^2}\cdot(a+x)$; $Subtg\,PT = \pm\frac{a^2y^2}{b^2(a+x)}$;
wo das (+) Zeichen gilt, so lange x positiv, das (—) Zeichen dagegen, wenn x und a+x negativ werden. *)

Beispiel 4. Giebt man die Kurve, wie (N. 10.) die Zykloide (Fig. 15.), durch 2 Gleichungen

$$1)\quad x = t - r\cdot Sin\frac{t}{r} \qquad \text{und} \qquad 2)\quad y = r - r\cdot Cos\frac{t}{r},$$

aus denen erst t eliminirt werden muß, um die wahre Gleichung zwischen x und y zu haben, so kann man auch, will oder kann man die Elimination nicht statt finden lassen, noch den Satz anwenden, daß

$$\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t}$$

ist, und deshalb die beiden Gleichungen (1. u. 2.) nach allem t differenziiren, um diese ∂y_t, ∂x_t zu erhalten. Man findet dann, weil diese Gleichungen nach t identisch sind, sobald x und y die durch sie bestimmten Funktionen von t vorstellen

$$3)\quad \partial x_t = 1 - Cos\frac{t}{r}, \qquad 4)\quad \partial y_t = Sin\frac{t}{r};$$

also

---

so daß deshalb jeder Strahl, der von dem einen Brennpunkt H der Ellipse ausgeht, von der Kurve nach dem andern Brennpunkt F hin zurückgeworfen wird, woher gerade diese Punkte F und H ihre Namen hergeholt haben.

*) Die vorliegenden Proportionen

$$CP : CA = CA : CT,$$
$$FM : FT = HM : HT$$

und

$$FM : FW = HM : HW$$

gelten auch für die Hyperbel (Fig. 11.), weshalb auch daselbst noch

$$W.\,HMT = W.\,FMT$$ ist.

$$5)\quad \partial y_x = \frac{Sin\frac{t}{r}}{1-Cos\frac{t}{r}} = Cotg\frac{t}{2r},$$

folglich

$$6)\quad Subn\,PW = r\cdot Sin\frac{t}{r} = \sqrt{2ry-y^2} = MR = PE; \;{}^{*})$$

$$7)\quad Subtg\,PT = r\cdot\frac{\left(1-Cos\frac{t}{r}\right)^2}{Sin\frac{t}{r}} = 2r\cdot\left(Sin\frac{t}{2r}\right)^2\cdot Tg\frac{t}{2r}$$

$$= \frac{y^2}{\sqrt{2ry-y^2}}.$$

Anmerkung. Uebrigens mag man nicht übersehen, daß jeder Punkt (in jedem bestimmten Zweig) der Kurve eine völlig bestimmte berührende gerade Linie hat; d. h. eine völlig bestimmte Tangente, eben so eine einzige und völlig bestimmte Normale (der Richtung nach); dagegen zu gleicher Zeit unendlich viele Subtangenten und unendlich viele zugehörige Subnormalen, weil letztere für jedes andere Axen-Paar, welches zu Grunde gelegt wird, anders sind; obgleich sie immer beziehlich $y:\partial y_x$ und $y\cdot\partial y_x$ seyn werden, sobald, auf dieses Axen-Paar bezogen, x und y die Koordinaten-Werthe der Kurve sind.

42.

Soll der Kreis bestimmt werden, der eine gegebene Kurve $y=\varphi_x$ osskulirt (oder berührt), so ist die andere Kurve $y=\psi_x$, jetzt die des Kreises, d. h. nach (N. 5.) die Gleichung

$$(y-b)^2+(x-a)^2 = c^2$$

oder

$$y = b\pm\sqrt{c^2-(x-a)^2}$$

(wo a und b die Koordinaten-Werthe des Mittelpunktes, c dagegen der Radius des Kreises ist). — Man hat also jetzt

---

*) Die in der (Fig. 15.) angemerkte Normale MW fällt also, da W in den Punkt E fallen muß, mit der Sehne ME des Kreises EMF zusammen.

$$b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2} \quad \text{statt} \quad \psi_x,$$

$$\mp \frac{x-a}{\sqrt{c^2-(x-a)^2}} \quad \text{oder} \quad -\frac{x-a}{\psi_x - b} \quad \text{statt} \quad \partial\psi_x$$

und
$$\mp \frac{c^2}{(\psi_x - b)^3} \quad \text{statt} \quad \partial^2\psi_x;$$

und die Gleichungen

$$\varphi_x = \psi_x, \quad \partial\varphi_x = \partial\psi_x, \quad \partial^2\varphi_x = \partial^2\psi_x,$$

welche zu einer Oskulation der 2ten Ordnung gehören, gehen jetzt über in

1) $\varphi_x = b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$,

2) $\partial\varphi_x = \mp \frac{x-a}{\sqrt{c^2-(x-a)^2}} = -\frac{x-a}{\varphi_x - b}$,

3) $\partial^2\varphi_x = \mp \frac{c^2}{(\psi_x - b)^3} = \mp \frac{c^2}{(\varphi_x - b)^3}$.

für $x = \alpha$; und dienen zur Bestimmung der noch unbestimmt gedachten Parameter a, b, c, d. h. der Lage des Mittelpunktes und der Länge des Radius dieses oskulirenden Kreises. — Wenn man die Gleichung $y = \psi_x$ in $y_1 = \psi_{x_1}$ d. h. in $y_1 = b \pm \sqrt{c - (x_1 - a)^2}$ oder $(y_1 - b)^2 + (x_1 - a)^2 = c^2$ umschreibt, damit unter x und y allemal bloß die Koordinaten-Werthe der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$, und zwar die des Punktes, in welchem die Oskulation statt finden soll, verstanden werden können, so daß man dann auch bloß y_x oder y statt φ_x, bloß ∂y_x oder ∂y statt $\partial\varphi_x$, und bloß $\partial^2 y_x$ oder $\partial^2 y$ statt $\partial^2\varphi_x$ schreiben kann, — so nehmen die 3 Gleichungen (1.—3.) leicht folgende Gestalten an:

4) $y - b = -\frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y}$ oder $b = y + \frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y}$,

5) $x - a = \frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y}.\partial y$ oder $a = x - \frac{1+\partial y^2}{\partial^2 y}.\partial y$,

6) $c = \frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y}$;

in welchen Gleichungen zur Rechten, da y, ∂y, $\partial^2 y$ lauter, durch

φ_x, $\partial\varphi_x$, $\partial^2\varphi_x$ vorgestellte und bekannte Funktionen von x sind, bloß x erscheint, während dieses x als eine bestimmte Abscisse gedacht wird, für einen Punkt der Kurve $y = \varphi_x$, an welchem die Oskulation mit dem, seiner Lage und seiner Größe nach gesuchten Kreise statt finden soll.

Diesen eben gefundenen Kreis, welcher an einem zu $x = x$ gehörigen Punkte der, durch $y = \varphi_x$ gegebenen Kurve, eine Oskulation der 2ten Ordnung hat (welche allemal ein Schneiden ist) nennt man den Krümmungskreis der Kurve an dieser Stelle; seinen Halbmesser c (aus 6. aber nothwendig allemal absolut d. h. positiv zu finden), nennt man den Krümmungshalbmesser an dieser Stelle.

Beispiel 1. Für die Parabel deren Gleichung

$$y^2 = px$$

ist, findet sich durch differenziiren

$$2y\cdot\partial y_x = p;$$

und nochmals differenziirend, und wenn durch 2 dividirt wird:

$$y\cdot\partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 = 0,$$

also $\qquad \partial y_x = \frac{p}{2y}, \qquad \partial^2 y_x = -\frac{\partial y^2}{y} = -\frac{p^2}{4y^3},$ *)

folglich der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(1+\partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y} = -\frac{(4y^2+p^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2} = -\frac{(4x+p)^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{p}},$$

wo jedoch das (—) Zeichen im Schreiben auch weggelassen werden konnte, da man weiß, daß der Krümmungshalbmesser doch positiv seyn muß, so daß also statt der 2deutigen $(4x+p)^{\frac{3}{2}}$ und $\sqrt{p}$ doch noch immer die Werthe gesetzt werden müssen, welche das Ganze positiv machen.

Beispiel 2. Für die Ellipse, deren Scheitelgleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\cdot(2ax - x^2)$$

---

*) Hier konnte man auch direkt aus $y^2 = px$ leicht finden

$$y = p^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{2}},$$

also $\qquad \partial y = \frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{2}}, \qquad \partial^2 y = -\frac{1}{4}p^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{3}{2}}.$

ist, findet man durch zweimaliges differenziiren

$$y \cdot \partial y = \frac{b^2}{a^2} \cdot (a-x)$$

und $$\partial y^2 + y \cdot \partial^2 y = -\frac{b^2}{a^2};$$

folglich daraus

$$\partial y = \frac{b^2(a-x)}{a^2 y}; \quad \partial^2 y = -\frac{b^2}{a^2 y}\left(1+\frac{b^2(a-x)^2}{a^2 y^2}\right) = -\frac{b^4}{a^2 y^3}; \text{**)}$$

also der Krümmungshalbmesser

$$= \frac{(1+\partial y)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y} = -\frac{[a^4 y^2 + b^4 (a-x)^2]^{\frac{3}{2}}}{a^2 b^2 [a^2 y^2 + b^2 (a-x)^2]} = \frac{[a^4 y^2 + b^4 (a-x)^2]^{\frac{1}{2}}}{a^4 b^4},$$

wo auch hier wieder das (—) Zeichen im Schreiben weggelassen werden konnte.

Beispiel 3. Für die (N. 9.) durch die Gleichung

$$y = \frac{a+b-x}{a-x} \cdot \sqrt{2ax - x^2}$$

gegebene Konchoide findet man zunächst

$$\partial y = \frac{(x-a)^2 (a+b-x) + b\,(2ax - x^2)}{(x-a)^2 \cdot \sqrt{2ax - x^2}};$$

daraus, wenn man nochmals differenziirt, $\partial^2 y$, und daraus den Krümmungshalbmesser

$$= \frac{a \cdot [(a-x)^4 + 2b(a-x)^3 + a^2 b^2)]^{\frac{3}{2}}}{(a-x)^3 \cdot [(a-x)^3 + 3b(a-x)^2 - 2a^2 b]};$$

während für dieselbe Konchoide, wo (Fig. 14.) EN $= x$, NG $= y$ ist,

$$\textit{Subtg}\ \mathrm{NT} = \frac{y}{\partial y} = \frac{(a-x)(a+b-x)(2ax - x^2)}{a^2 b + (a-x)^3}.$$

**) Auch hier konnte man sogleich in aufgelöster Gestalt schreiben

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2},$$

und daraus direkt finden

$$\partial y = \frac{b \cdot (a-x)}{a \cdot \sqrt{2ax - x^2}},$$

so wie noch

$$\partial^2 y = -\frac{ab}{(\sqrt{2ax - x^2})^3},$$

alle Ableitungszeichen (∂) nach x genommen.

und

$$Subn\, NW = y \cdot \partial y = \frac{(a+b-x) \cdot [a^2 b + (a-x)^3]}{(a-x)^3}$$

gefunden wird. *)

Um noch mehre der frühern Lehren der Ableitungs- oder Differenzial-Rechnung in Anwendung zu bringen, wollen wir hier einmal annehmen, es wäre die Konchoide durch die Polar-Gleichung (N. 9.)

$$1)\ r = a + \frac{b}{Cos\, v} \quad \text{oder} \quad (r-a) \cdot Cos\, v = b$$

gegeben, während dann

$$2)\ y = r \cdot Sin\, v \qquad \text{und} \quad 3)\ x = a + b - r \cdot Cos\, v$$

die Gleichungen sind, welche zwischen den Polar-Koordinaten r und v und zwischen den rechtwinklichen x und y eines und desselben Punktes G der Kurve (Fig. 14.) statt finden. — Da man nun zwischen r, v, x, y, 3 Gleichungen hat, aus denen r und v eliminirt werden kann, so bleibt y noch immer eine gegebene Funktion von x, so daß ∂y_x, $\partial^2 y_x$, ebenfalls dadurch bestimmte Funktionen von x sind. Will man nun diese leztern (nämlich ∂y_x, $\partial^2 y_x$) finden, ohne jedoch y in x selbst haben zu wollen, so muß man bedenken, daß durch vorstehende Gleichungen (1.—3.) r, v und y als diejenigen Funktionen von x gegeben sind, welche

---

*) Auch hier konnte die Gleichung der Konchoide in verwickelter Gestalt

$$(a-x)^2 \cdot y^2 = (a+b-x)^2 (2ax - x^2)$$

gegeben seyn. Dann konnte man durch zweimaliges differenziiren (nach allem x) erhalten

$$(a-x)^2 \cdot y \cdot \partial y - (a-x) \cdot y^2 = (a+b-x)^2 (a-x) - (a+b-x)(2ax - x^2),$$

und

$$(a-x)^2 \cdot (\partial y^2 + y \cdot \partial^2 y) - 4(a-x) \cdot y \cdot \partial y + y^2 = -4(a+b-x)(a-x) - (a+b-x)^2 + 2ax - x^2;$$

und dann konnte man hieraus ∂y und $\partial^2 y$ finden, anfänglich in y und x ausgedrückt, während jedoch wiederum y in x gegeben ist.

alle 3 Gleichungen zugleich identisch machen. Differenzìirt man daher alle 3 Gleichungen nach allem x, oder noch besser nach allem t, indem man nämlich x selber wieder, und somit auch y, r und v als Funktionen von t ansieht, so erhält man:

aus (1.) .... 4) $\partial r = \frac{b \cdot Sin\, v \cdot \partial v}{Cos\, v^2}$;

aus (2.) .... 5) $\partial y = Sin\, v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v$;

aus (3.) .... 6) $\partial x = -Cos\, v \cdot \partial r + r \cdot Sin\, v \cdot \partial v$;

woraus dann, wenn $\partial x = 1$ d. h. $t = x$ genommen wird, d. h. wenn die Ableitungen alle nach x genommen werden, ∂r und ∂v eliminirt, und ∂y d. h. ∂y_x gefunden werden kann, nämlich

(A.) .... $\partial y_x = \frac{b \cdot Sin\, v^2 + r \cdot Cos\, v^2}{Cos\, v \cdot (-b \cdot Sin\, v + r \cdot Sin\, v \cdot Cos\, v)}$.

Man kann aber auch den Satz anwenden, nach welchem

(B.) .... $\partial y_x = \frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \frac{Sin\, v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v}{-Cos\, v \cdot \partial r + r \cdot Sin\, v \cdot \partial v}$

ist, wenn man aus (5. u. 6.) für ∂y_t und ∂x_t die daselbst gefundenen Werthe substituirt. Zuletzt kann aus (4.) der Werth von ∂r in (B.) statt ∂r gesetzt werden, so fällt ∂v von selbst weg, so daß man dasselbe Resultat (A.) erhält.

Um nun $\partial^2 y_x$ unter den gegenwärtigen Voraussetzungen zu finden, müßte man die Gleichungen (4.—6.) nach allem x differenzìiren, in (6.) vorher 1 statt ∂x setzend; dann erhielte man

aus (4.) .... 7) $\partial^2 r = \frac{b \cdot Sin\, v \cdot \partial^2 v}{Cos\, v^2} + \frac{b \cdot \partial v^2}{Cos\, v} + 2\frac{b \cdot Sin\, v^2 \cdot \partial v^2}{Cos\, v^3}$;

aus (5.) .... 8) $\partial^2 y = Sin\, v \cdot \partial^2 r + 2\, Cos\, v \cdot \partial v \cdot \partial r - r \cdot Sin\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Cos\, v \cdot \partial^2 v$;

aus (6.) .... 9) $0 = -Cos\, v \cdot \partial^2 r + 2 Sin\, v \cdot \partial v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Sin\, v \cdot \partial^2 v$;

aus welchen Gleichungen (7.—9.) in Verbindung mit (4.—6.) nicht bloß ∂r, $\partial^2 r$, ∂v, $\partial^2 v$ eliminirt, sondern auch ∂y, $\partial^2 y$ (alle nach x genommen, also ∂y_x, $\partial^2 y_x$) gefunden werden können.

43.

Da diese Rechnungen nicht ohne einige Mühe durchgeführt werden, so würde man, sollte bloß der Krümmungshalbmesser gefunden werden, diesen, wenn er $= \gamma$ gesetzt wird, weil

$$1)\quad \gamma = \frac{(1+\partial y_x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x} \quad \text{ist,}$$

lieber (nach dem 3ten Kap.) so umformen, daß er statt ∂y_x, $\partial^2 y_x$, lieber ∂y, ∂x, $\partial^2 y$, $\partial^2 x$, nach einem beliebigen neuen Veränderlichen t (oder v oder r ꝛc.) genommen, enthielte. Weil aber nach (§. 59.)

$$\partial y_x = \frac{\partial y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \partial^2 y_x = \frac{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}{\partial x^3} \quad \text{ist,}$$

so erhält man

$$2)\quad \gamma = \frac{(\partial x^2 + \partial y^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x}.$$

Ist dann 3) $y = r \cdot Sin\, v$ und 4) $x = \alpha - r \cdot Cos\, v$,

also 5) $\partial y = Sin\, v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v$,

6) $\partial x = -Cos\, v \cdot \partial r + r \cdot Sin\, v \cdot \partial v$,

so wird 7) $\partial x^2 + \partial y^2 = \partial r^2 + r^2 \cdot \partial v^2$.

Und differenzirt man (5. u. 6.) auf's neue, so wird noch

$$8)\quad \partial^2 y = Sin\, v \cdot \partial^2 r + 2\, Cos\, v \cdot \partial v \cdot \partial r - r \cdot Sin\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Cos\, v \cdot \partial^2 v,$$

$$9)\quad \partial^2 x = -Cos\, v \cdot \partial^2 r + 2\, Sin\, v \cdot \partial v \cdot \partial r + r \cdot Cos\, v \cdot \partial v^2 + r \cdot Sin\, v \cdot \partial^2 v;$$

woraus dann

$$10)\quad \partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x = r \cdot (\partial v \cdot \partial^2 r - \partial r \cdot \partial^2 v) - (r^2 \partial v^2 + 2 \partial r^2) \cdot \partial v$$

hervorgeht, so daß, wenn diese Werthe aus (7.) und (10.) in (2.) substituirt werden, der Krümmungshalbmesser

$$11)\ \gamma = \frac{(\partial r^2 + r^2 \cdot \partial v^2)^{\frac{3}{2}}}{r \cdot (\partial v \cdot \partial^2 r - \partial r \cdot \partial^2 v) - (r^2 \cdot \partial v^2 + 2\partial r^2) \cdot \partial v}$$

hervorgeht.

Da hier die Ableitungen nach allem t verstanden sind, so kann man auch $t = v$ nehmen, wo denn $\partial v_t = 1$, und $\partial^2 v_t = 0$ wird, und es wird dann

$$12)\ \gamma = \frac{(\partial r^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}{r \cdot \partial^2 r - r^2 - 2\partial r^2},$$

wo alle ∂ auf v sich beziehen, d. h. wo ∂r und $\partial^2 r$ statt ∂r_v und $\partial^2 r_v$ stehen.

Beispiel 1. Wird dann eine Gleichung der Kurve zwischen ihren Polar-Koordinaten gegeben, z. B. die der Konchoide

$$1)\ r = a + \frac{b}{Cos\,v} \quad \text{oder} \quad (r - a) \cdot Cos\,v = b,$$

so erhält man, nach v differenziirend,

$$2)\ Cos\,v \cdot \partial r - (r - a) \cdot Sin\,v = 0$$

und $3)\ Cos\,v \cdot \partial^2 r - 2\,Sin\,v \cdot \partial r - (r - a) \cdot Cos\,v = 0,$

woraus dann ∂r und $\partial^2 r$ leicht gefunden, und ihre Werthe selbst in (12.) substituirt werden können, um den Krümmungshalbmesser γ in r und v ausgedrückt zu haben, d. h. in den Polar-Koordinaten des Punktes, für dessen nächste Umgebung die Krümmung gesucht wird.

Beispiel 2. Nehmen wir als neues Beispiel, den Krümmungshalbmesser zu finden, die Gleichungen (N. 10.) für die Zykloide, nämlich

$$1)\ x = t - r \cdot Sin\frac{t}{r} \quad \text{und} \quad 2)\ y = r - r \cdot Cos\frac{t}{r},$$

welche, wenn man t eliminirt, die Gleichung zwischen rechtwinklichen Koordinaten x und y liefert. Will man nun den Krümmungshalbmesser finden, jedoch ohne die Elimination von t wirklich vorzunehmen, so sind x und y als die Funktionen von t anzusehen, welche die Gleichungen (1. u. 2.) identisch machen; also erhält man, wenn man (1. u. 2.) nach allem t differenziirt,

$$3)\ \partial x = 1 - Cos\frac{t}{r}; \qquad 4)\ \partial y = Sin\frac{t}{r};$$

$$5)\ \partial^2 x = \frac{1}{r} \cdot Sin\frac{t}{r}; \qquad 6)\ \partial^2 y = \frac{1}{r} \cdot Cos\frac{t}{r};$$

folglich

$$\partial x^2 + \partial y^2 = 2 - 2 Cos\frac{t}{r} = 2\left(1 - Cos\frac{t}{r}\right) = 4\cdot\left(Sin\frac{t}{2r}\right)^2$$

und $\partial x \cdot \partial^2 y - \partial y \cdot \partial^2 x = \frac{1}{r}\cdot Cos\frac{t}{r} - \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}\left(1 - Cos\frac{t}{r}\right)$

$$= -\frac{2}{r}\cdot\left(Sin\frac{t}{2r}\right)^2.$$

Substituirt man daher diese Werthe in (N. 43. 2.), so erhält man den Krümmungshalbmesser

$$\gamma = \pm 4r\cdot Sin\frac{t}{2r} = 2r\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{1 - Cos\frac{t}{r}} = 2\sqrt{2ry},$$

während die $\sqrt{2ry}$ als die mittlere Proportionale anzusehen ist, zwischen dem Durchmesser 2r des beschreibenden Kreises und der Ordinate y, so daß für den Punkt M (Fig. 15.)

$\gamma = 2\cdot EM$ wird.

44.

Würde der Kreis gesucht, welcher mit der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ (Fig. 12.) an einem Punkt M eine Oskulation der ersten Ordnung hat (welche dasmal ein Berühren ist), so dürfte man bloß die beiden y und die beiden ∂y_x, der Kurve $y = \varphi_x$ und der Kreislinie

$(y-b)^2 + (x-a)^2 = c^2$ oder $y = b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$,

einander gleich nehmen, für $x = \alpha$; so daß man bloß die Gleichungen (1. u. 2.) der (N. 42.), nicht mehr aber die Gleichung (3. der N. 42.), also nur die beiden Gleichungen

1) $\varphi_x = b \pm \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$ oder $(\varphi_x - b)^2 + (x-a)^2 = c^2$

und

2) $\partial\varphi_x = -\frac{x-a}{\varphi_x - b}$ oder $(\varphi_x - b)\cdot\partial\varphi_x + (x-a) = 0$

zur Bestimmung der 3 Parameter a, b, c hätte. Einer der Parameter z. B. a (der Abscissenwerth des Mittelpunktes) bliebe daher willkührlich, während zu jedem beliebig angenommenen a, die beiden andern Parameter b und c aus (1. und 2.) sich völlig bestimmten. — Es existiren also unendlich viele Kreise, welche alle an der Stelle M (Fig. 12.) mit der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ eine Oskulation der ersten Ordnung haben, unter denen

sich jedoch auch derjenige befindet, welcher die Oskulation der 2ten Ordnung hat, und Krümmungskreis genannt worden ist.

Weil aber dadurch die Gleichung (2.) nur b, a und x (d. h. α) enthält, so ist sie diejenige, welche zu jedem a das zugehörige b liefert, also die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen b und a, aller der Mittelpunkte aller dieser, die Stelle M in der ersten Ordnung oskulirenden Kreise. Setzt man in ihr y und ∂y_x statt φ_x und $\partial \varphi_x$, so kann sie leicht auf die Form

$$b - y = -\frac{1}{\partial y_x}(a - x),$$

gebracht werden, welches nach (N. 41. 2.) die Gleichung der Normale an den Punkt M der Kurve ist.

Die Mittelpunkte aller dieser, die Stelle M in der ersten Ordnung oskulirenden Kreise, liegen also in der durch M hindurchgehenden, und auf der, die Stelle M berührenden geradlinigen Tangente, senkrechten geraden Linie, d. h. sie liegen alle in der zum Punkte M der Kurve gehörigen Normale.

45.

Man kann sich aber dieselben Resultate (der NN. 42.—44.) leichter noch verschaffen, wenn man die Gleichung des Kreises

$$1)\quad (y_x - b)^2 + (x - a)^2 = c^2$$

nicht wirklich nach y auflöst, sondern dem (3ten Kap.) gemäß, lieber zweimal hinter einander nach allem x differenziirt, um

$$2)\quad (y_x - b) \cdot \partial y_x + (x - a) = 0$$

und

$$3)\quad (y_x - b) \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x{}^2 + 1 = 0$$

als diejenigen Gleichungen zu erhalten, welche in Verbindung mit (1.) zur Bestimmung von y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, in x ausgedrückt, dienen. — Und da es natürlich auch einerlei ist, ob man aus diesen Gleichungen diese y, ∂y, $\partial^2 y$ für den Kreis findet, und solche Werthe beziehlich den y, ∂y, $\partial^2 y$ der gegebenen Kurve ($y = \varphi_x$) gleich setzt, oder ob man in die Gleichungen (1.—3.) in ihrer unaufgelösten [illegible] der y, ∂y, $\partial^2 y$ des [illegible]

der Kurve setzt; — so folgt, daß obige 3 Gleichungen (1.—3.) bereits die 3 Bedingungen der Oskulation sind, welche zur Bestimmung von a, b, c dienen, sobald man nur unter y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ nicht mehr die dem Kreise angehörigen, sondern die der gegebenen Kurve $y = \varphi_x$ angehörigen y, ∂y, $\partial^2 y$, vorgestellt sich denkt, während dann für x selbst der bestimmte Abscissen-Werth des Punktes M gesetzt gedacht wird, an welchem die Oskulation statt finden soll.

Auch ist es wiederum nicht nöthig, daß die Gleichung der gegebenen Kurve in der aufgelösten Form $y = \varphi_x$ gegeben sey, sondern es kann solche ebenfalls in der verwickelten Form

$$F_{x,y} = 0$$

gegeben seyn, da man durch zweimaliges differenziren dieser Gleichung nach allem x, die nöthigen Gleichungen sich verschafft, um die unter den Zeichen y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ verstandenen, dieser Gleichung $F_{x,y} = 0$ entsprechenden Funktionen von x, durch sie selbst bestimmt zu sehen.

Dasselbe Verfahren läßt sich aber allgemein und wie folgt aussprechen. Ist $F_{x,y} = 0$ eine völlig bestimmte Kurve und $f_{x,y} = 0$, was in (N. 38.) in aufgelöster Form durch $y = \psi_x$ vorgestellt war, so differenzirt man sogleich

$$\text{I.} \quad f_{x,y} = 0,$$

und erhält

$$\text{II.} \quad \partial f_x + \partial f_y \cdot \partial y_x = 0,$$

$$\text{III.} \quad \partial^2 f_x + 2\partial^{1,1} f_{x,y} \cdot \partial y + \partial^2 f_y \cdot \partial y^2 + \partial f_y \cdot \partial^2 y = 0$$

u. s. w. f.;

denkt sich dann in diesen Gleichungen unter y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, 2c. 2c. die y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$, 2c. der erstern Kurve $F_{x,y} = 0$; und unter dieser Voraussetzung sind dieselben Gleichungen (I. II. III. 2c. 2c.) bereits die Bedingungen der Oskulation, welche für jedes gegebene x zur Bestimmung der in $f_{x,y} = 0$ noch vorkommenden unbestimmten Parameter dienen.

Anmerkung 1. Nachdem diese Theorie der Oskulation (gewöhnlich auch Theorie der Berührung genannt) beendigt ist,

wollen wir nachweisen, wie dieselben Resultate mittelst der Differenzial-Rechnung, und dieselben wieder mittelst der Methode der Grenzen hervorgebracht werden.

I. Die Differenzial-Rechnung sieht jede Kurve als ein Unendlichvieleck an, und nach ihr haben zwei Kurven eine Oskulation (Berührung) der nten Ordnung, wenn sie n auf einander folgende dieser (geradlinigen) Elemente, also n+1 auf einander folgende Ecken mit einander gemein haben. Sollen daher 2 Kurven $y = \varphi_x$ und $y = \psi_x$ eine Berührung der nten Ordnung haben, so müssen die zu den Abscissen x, $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, ... $x+ndx$ gehörigen Ordinaten einander gleich seyn, in beiden Kurven, welches nach (N. 37. und Anmerkung) der Fall ist, so oft die y, und auch die dy, d^2y, d^3y, ... und noch d^ny in beiden Kurven dieselben sind; so daß also genau dieselben Resultate erhalten werden, zu denen auch (N. 38.) geführt hat.

Namentlich also betrachtet die Differenzial-Rechnung die geradlinige Tangente MT (Fig. 10. 11. oder 12.) als die Verlängerung des an M befindlichen Elementes der Kurve, von dessen einer Ecke M die Koordinaten x und y, von dessen zweiter Ecke aber $x+dx$ und $y+dy$ die Koordinaten sind, so daß (Fig. 12.) für $MO = dx$, $ON = ON' = dy$ ist. *)

Also auch

$$Tg\,tMO = \frac{ON'}{OM} = \frac{ON}{OM} = \frac{dy}{dx};$$

und dann noch

$$Tg\,tMO = Tg\,MTP = \frac{PM}{PT} = \frac{y}{PT};$$

folglich $\frac{y}{PT} = \frac{dy}{dx}$ oder $PT = \frac{y \cdot dx}{dy}$.

Und PW findet sich dann aus der Proportion

$PT : PM = PM : PW$ genau wie oben.

*) Der zur Abscisse $x+dx$ gehörige Punkt N der Kurve, und der N' der Tangente fallen, der Annahme zu Folge, in einen und denselben zusammen, daher $ON = ON'$.

II. Die „Methode der Grenzen" denkt sich zuerst, daß die beiden Kurven $y = \psi_x$ und $y = \varphi_x$ $n+1$ verschiedene von einander beliebig entfernte, etwa zu den Abscissen x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, ... $x+n\cdot\Delta x$ gehörige Punkte mit einander gemein haben, denkt sich dann diese Punkte, dadurch, daß Δx immer kleiner wird, einander immer näher und näher rückend, und nennt eine Berührung der nten Ordnung denjenigen Zustand der Kurven, wo diese $n+1$ anfänglich beliebig getrennten Punkte an der Grenze des Zusammenrückens d. h. für $\Delta x = 0$ in einen und denselben zusammengefallen sind. — Damit aber die beiden Kurven (für $x = \alpha$) die zu x, $x+\Delta x$, $x+2\Delta x$, ... $x+n\cdot\Delta x$ gehörigen Punkte mit einander gemein habe, hat man die $n+1$ Gleichungen

$$\left.\begin{array}{lcl} \psi_x & = & \varphi_x \\ \psi_{x+\Delta x} & = & \varphi_{x+\Delta x} \\ \psi_{x+2\Delta x} & = & \varphi_{x+2\Delta x} \\ \vdots & & \vdots \\ \psi_{x+n\cdot\Delta x} & = & \varphi_{x+n\cdot\Delta x} \end{array}\right\}$$

alle unter der Voraussetzung, daß $x = \alpha$ ist, d. h. daß x einen bestimmten Werth hat.

Schreibt man nun in diesen Gleichungen die nach Δx fortlaufende Reihen, wie solche der Taylor'sche Lehrsatz darbietet, statt $\psi_{x+\Delta x}$, $\varphi_{x+\Delta x}$, $\psi_{x+2\Delta x}$, rc. rc. rc., zieht dann die 1ste von der 2ten ab, die 2te von der 3ten, u. s. w. f.; zieht man ferner in den n neuen Gleichungen wiederum die 1ste von der 2ten ab, die 2te von der 3ten, die 3te von der 4ten, u. s. w.; — zieht man ferner in diesen $n-1$ neuen Gleichungen wiederum so von einander ab, um $n-2$ neue Gleichungen zu erhalten, u. s. w. f.; — so wird, wie schon (N. 37.) durchblicken läßt, in jeder neuen Parthie von Gleichungen, die erstere Gleichung links und rechts Reihen haben, welche, wenn man sie durch die gehörige Potenz von Δx wegdividirt, nach und nach beziehlich mit

$\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d^2\psi}{dx^2}$, $\frac{d^3\psi}{dx^3}$, rc. rc. auf der einen Seite,

und mit

$\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \frac{d^3\varphi}{dx^3}$, ꝛc. ꝛc. auf der andern Seite

anfangen, so daß diese Gleichungen für $\Delta x = 0$ sich zuletzt auf

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}, \quad \frac{d^3\psi}{dx^3} = \frac{d^3\varphi}{dx^3}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

reduziren, immer für $x = \alpha$; und so die Gleichungen sind der Berührung (Oskulation); dieselben, welche wir auch oben gefunden haben.

Da aber diese „Methode der Grenzen" die Entwicklung in, nach Potenzen von Δx fortlaufenden Reihen vermeidet, so wird sie die geeigneten Mittel zu ergreifen haben, wenn sie sich konsequent bleiben will, um etwa die Gleichungen

$$\Delta\psi = \Delta\varphi, \quad \Delta^2\psi = \Delta^2\varphi, \quad \Delta^3\psi = \Delta^3\varphi, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

und daraus die Gleichungen

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta x} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta^2\psi}{\Delta x^2} = \frac{\Delta^2\varphi}{\Delta x^2}, \quad \frac{\Delta^3\psi}{\Delta x^3} = \frac{\Delta^3\varphi}{\Delta x^3}, \text{ ꝛc. ꝛc.}$$

zu erhalten, und solche für $\Delta x = 0$ in die obigen Gleichungen übergehen zu machen.

So z. B. denkt sich namentlich diese Methode, wenn sie die berührende gerade Linie aufsucht, zuerst die durch M oder (x,y) und N oder $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ (Fig. 12.) gehende Sehne MN, in ihrer Richtung vorgestellt durch die Gleichung

$$y_1 - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot(x_1 - x); \text{ *)}$$

und für $\Delta x = 0$ geht dann diese Sehne in die Tangente

$$y_1 - y = \frac{dy}{dx}\cdot(x_1 - x) \qquad \text{über.}$$

---

*) Weil MO = Δx, so ist NO = Δy, also $\frac{\Delta y}{\Delta x} = Tg\,\text{NMO}$; nimmt man daher (N. 4.) zu Hilfe, so hat man diese Gleichung der Sehne oder der Sekante MN.

Anmerkung 2. Statt der berührenden geraden Linie, oder statt des oskulirenden Kreises, konnte man auch eine, die beliebig gegebene Kurve $y = \varphi_x$ oskulirende Ellipse, Parabel oder Hyperbel suchen. Da die Gleichung dieser letztern Linien, wenn ihre Lage gegen die gegebenen Axen völlig unbestimmt bleiben soll, 5 Parameter hat, nämlich

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

ist, so kann man einen Kegelschnitt suchen wollen, welcher mit der Kurve $y = \varphi_x$, an einem gegebenen Punkte derselben, eine Oskulation der 4ten Ordnung hat, der dann bald eine Parabel, bald eine Ellipse, bald eine Hyperbel werden wird. — Bestimmt man den Kegelschnitt gleich anfangs, sucht man z. B. die oskulirende Ellipse, so hat man dadurch zwischen den 5 Parametern die Abhängigkeit festgesetzt, daß $B^2 < 4C$ ist (wird eine Parabel gesucht, so ist $B^2 = 4C$, und bei einer gesuchten Hyperbel ist $B^2 > 4C$); im Allgemeinen kann man daher jetzt nur noch über 4 der Parameter (so wie bei dem Kreise nur noch über 3 Parameter) disponiren, so daß im Allgemeinen jetzt nur noch eine Oskulation der 3ten Ordnung (und bei dem Kreise nur eine Oskulation der 2ten Ordnung) verlangt werden kann.

46.

Ist gegeben eine krumme Fläche durch eine Gleichung

1) $\varphi_{x,y,z} = 0$

zwischen den 3 Koordinaten-Werthen, x, y, z ihrer einzelnen Punkte, und versteht man unter Tangential-Ebene (oder berührender Ebene) an einem Punkte, für welchen $x = \alpha$ und $y = \beta$ ist (während z dann aus der gegebenen Gleichung $\varphi = 0$ dazu gefunden und solcher Werth durch γ bezeichnet werden kann), diejenige Ebene, welche diesen Punkt (α, β, γ) mit der krummen Fläche gemein hat, und in welcher zu gleicher Zeit ihre rings herum nächst anliegenden Punkte von den rings herum nächst anliegenden Punkten der krummen Fläche am wenigsten abstehen [im Vergleich mit allen übrigen Ebenen,

welche noch durch den Punkt (α β, γ) hindurchgehen], so wird solche berührende Ebene, wie folgt, gefunden.

Es ist nämlich die allgemeine Gleichung jeder Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

oder 2) $z = ay + bx + c$,

so daß die 3 Parameter a, b, c der Bedingung der Berührung gemäß bestimmt werden müssen.

Wenn nun x und y die Koordinaten-Werthe der Projektion M_1 (Fig. 20.) eines beliebigen Punktes M der krummen Fläche auf die Koordinaten-Ebene XAY sind, so sind $x + \varkappa \cdot \delta x$ und $y + \varkappa \cdot \delta y$ die Koordinaten eines beliebigen der rings herum liegenden Punkte, wenn δx und δy ganz beliebig gedacht werden und von einander unabhängig. Und denkt man sich noch überdies $\varkappa$ im Moment des Verschwindens, so sind die Punkte zu gleicher Zeit nächst anliegende.

Um nun der Bedingung der Berührung zu genügen, so müssen in beiden Gleichungen (1. u. 2.) für $x = \alpha$ und $y = \beta$, die beiden z einander gleich, und die beiden

$$z_{x+\varkappa \cdot \delta x,\ y+\varkappa \cdot \delta y}$$

für $x = \alpha$ und $y = \beta$, am allerwenigsten von einander verschieden seyn. — Nun ist aber nach dem Taylor'schen Lehrsatze für 2 Veränderliche (§. 32. N. 4.)

$$z_{x+\varkappa \cdot \delta x,\ y+\varkappa \cdot \delta y} = z + (\partial z_x \cdot \delta x + \partial z_y \cdot \delta y) \cdot \varkappa + P \cdot \varkappa^2 + \cdots;$$

folglich wird letztere Bedingung erfüllt, wenn die beiden

$$\partial z_x \cdot \delta x + \partial z_y \cdot \delta y$$

dieselben sind (immer für $x = \alpha$ und $y = \beta$); *) also wenn

$$3)\quad \partial z_x \cdot \delta x + \partial z_y \cdot \delta y = \partial z'_x \cdot \delta x + \partial z'_y \cdot \delta y$$

ist, unter der Voraussetzung, daß hier z' die Koordinate der Ebene,

*) Je mehr erste Glieder von zwei nach Potenzen von $\varkappa$ geordneten Reihen, in denen $\varkappa$ im Moment des Verschwindens gedacht ist, mit einander übereinstimmen, desto geringer ist der Unterschied der Werthe dieser beiden Reihen.

z aber die Koordinate der krummen Fläche vorstellt. — Weil aber die Gleichung (3.) statt finden soll für jedes ∂x und für jedes ∂y, so kann solche nicht bestehen, wenn nicht einzeln

$$4)\ \partial z_x = \partial z'_x \quad \text{und} \quad 5)\ \partial z_y = \partial z'_y$$ ist,

während auch

$$6)\quad z = z'$$

vorausgesetzt werden mußte (immer für $x = \alpha$ und $y = \beta$). Die Gleichungen (4. 5. u. 6.) sind nun die 3 Gleichungen, welche zur Bestimmung der Parameter dienen. Weil aber die Gleichung (2.), nämlich

$$z' = ax + by + c,$$

wenn sie nach x und nach y differenziirt wird,

$$\partial z'_x = a \quad \text{und} \quad \partial z'_y = b$$

liefert, so hat man die 3 Gleichungen

$$7)\quad z = ax + by + c,$$

$$8)\ \partial z_x = a \quad \text{und} \quad 9)\ \partial z_y = b$$

in denen z, ∂z_x, ∂z_y die der krummen Fläche $\varphi_{x,y,z} = 0$ sind, und woraus

$$a = \partial z_x, \quad b = \partial z_y \quad \text{und} \quad c = z - x \cdot \partial z_x - y \cdot \partial z_y$$

folgert, während nur noch überall α und β beziehlich statt x und y gesetzt werden müssen.

Unterscheidet man nun die x, y, z der berührenden Ebene, von denen der gegebenen krummen Fläche dadurch, daß man erstere durch x', y', z' vorstellt, so daß die Gleichung der Ebene

$$z' = ax' + by' + c$$ ist,

so wird, wenn man für a, b, c die eben gefundenen Werthe substituirt,

$$(\odot) \cdots\cdot\ z' - z = \partial z_x \cdot (x' - x) + \partial z_y \cdot (y' - y)$$

die Gleichung der, die krumme Fläche $\varphi_{x,y,z} = 0$ an dem Punkt (x, y, z) berührenden Ebene seyn, sobald man in dieser Gleichung statt z und ∂z_x und ∂z_y, die aus der Gleichung $\varphi_{x,y,z} = 0$ für solche hervorgehenden Funktionen von x und y setzt, unter x und

y selbst aber die bestimmten Werthe α und β für den Punkt M versteht, an welchem die Berührung statt finden soll.

Anmerkung. Nach diesem Muster wäre es leicht, die Bedingungen der Berührung zweier beliebiger Flächen, an einem gegebenen Punkte, aufzufinden.

47.

Um ∂z_x, ∂z_y aus $\varphi_{x,y,z} = 0$ zu finden, ohne die Gleichung vorher nach z auflösen zu müssen, darf man nur diese Gleichung, welche, sobald man unter z die durch sie gegebene Funktion von x und y versteht, nach allem x und nach allem y identisch ist, nach allem x und nach allem y differenziren und man erhält

$$\partial\varphi_x + \partial\varphi_z \cdot \partial z_x = 0, \quad \text{also} \quad \partial z_x = -\frac{\partial\varphi_x}{\partial\varphi_z};$$

$$\partial\varphi_y + \partial\varphi_z \cdot \partial z_y = 0, \quad \text{also} \quad \partial z_y = -\frac{\partial\varphi_y}{\partial\varphi_z}.$$

Und setzt man diese Werthe in die Gleichung (⊙ N. 46.) der berührenden Ebene, so wird solche diese Form annehmen

$$(\text{C}) \cdots\cdot \partial\varphi_z \cdot (z'-z) + \partial\varphi_y \cdot (y'-y) + \partial\varphi_x \cdot (x'-x) = 0,$$

wo $\partial\varphi_z$, $\partial\varphi_y$, $\partial\varphi_x$ so wie φ selbst, bestimmte Funktionen von x, y, z sind, in denen, so wie überall, für diese x, y, z durchgehends die bestimmten Koordinaten-Werthe des Punktes M (an welchem die Berührung seyn soll) gesetzt werden müssen, und wo x', y', z' die Koordinaten-Werthe vorstellen von jedem beliebigen Punkte der berührenden Ebene.

48.

Versteht man unter der Normale einer krummen Fläche an einem gegebenen Punkt M, die durch diesen Punkt M hindurchgehende und auf die in diesem Punkte M berührende Ebene senkrechte gerade Linie, so sind nach (N. 33.) die zusammengehörigen Gleichungen derselben

$$\left.\begin{array}{l}\partial\varphi_x\cdot(z'-z)-\partial\varphi_z\cdot(x'-x)=0\\ \partial\varphi_y\cdot(z'-z)-\partial\varphi_z\cdot(y'-y)=0\end{array}\right\}$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}\partial\varphi_x\cdot(y'-y)-\partial\varphi_y\cdot(x'-x)=0\\ \partial\varphi_x\cdot(z'-z)-\partial\varphi_z\cdot(x'-x)=0\end{array}\right\}'$$

so daß, wenn ε', ε'', ε''' die Winkel sind, welche diese Normale mit den Axen AX, AY, AZ macht (d. h. mit geraden Linien, welche von einem Punkte der Normale aus mit diesen Axen parallel gedacht werden), allemal seyn muß, wenn

$$\sqrt{\partial\varphi_x^2+\partial\varphi_y^2+\partial\varphi_z^2}=V \quad \text{gesetzt wird,}$$

$$Cos\,\varepsilon'=\frac{\partial\varphi_x}{V},\quad Cos\,\varepsilon''=\frac{\partial\varphi_y}{V},\quad Cos\,\varepsilon'''=\frac{\partial\varphi_z}{V}.$$

Von der Rektifikation und der Quadratur der Kurven und der krummen Flächen, so wie auch von der Kubatur der durch letztere begrenzte Körper.

49.

Einen Bogen einer Kurve (oder die ganze Kurve) rektifiziren, oder die Länge eines Bogens finden, heißt, seine Länge als benannte Zahl ausdrücken, deren Benennung irgend eine als Einheit (Maaßstab) angenommene gerade Linie ist. — Eine Kurve oder eine krumme Fläche quadriren, oder den Inhalt finden, heißt, eine entweder durch die ganze Kurve oder durch einen Bogen derselben und durch gerade Linien begrenzte Ebene oder eine begrenzte krumme Fläche als benannte Zahl ausdrücken, deren Benennung irgend ein als Einheit genommenes Quadrat (Quadratzoll, Quadratfuß, ꝛc. ꝛc.) ist. *) — Und unter Kubatur einer krummen Fläche versteht man die Auffindung der Zahl der zur Einheit angenommen Kuben (Kubikzolle, Kubikfuße ꝛc. ꝛc.), welche ein durch eine solche krumme Fläche begrenzter Körper enthält.

*) In diesem Sinne kann man auch von der Quadratur des Kreises sprechen.

50.

Ist aber (Fig. 12.) D ein bestimmter zur gegebenen Abscisse AB = a gehöriger Punkt der Kurve, M dagegen ein unbestimmter zu AP = x gehöriger, — ist ferner PM = y, so wie zwischen x und y eine Gleichung der Kurve gegeben, so ist offenbar der Inhalt BDPM von der Abscisse AP abhängig, also eine Funktion von x, welche durch f_x vorgestellt seyn kann.

Wenn nun auch f_x selber noch unbekannt ist, so muß doch, wenn PQ = Δx gesetzt wird, die Differenz Δf d. h. $f_{x+\Delta x} - f_x$ d. h. PQMN allemal zwischen den Grenzen

PQMO oder $y \cdot \Delta x$

und PQNR oder $(y + \Delta y) \cdot \Delta x$

liegen, während $\Delta y = \partial y_x \cdot \Delta x + \partial^2 y_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} +$ 2c. 2c.

und $\Delta f = \partial f_x \cdot \Delta x + \partial^2 f_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots$ ist.

Man hat also eine nach Δx fortlaufende Reihe

$$\Delta f \text{ oder } \partial f_x \cdot \Delta x + \partial^2 f_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 f_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots,$$

welche für jedes Δx zwischen den Grenzen

$$y \cdot \Delta x$$

und
$$y \cdot \Delta x + \partial y_x \cdot \Delta x^2 + \partial^2 y_x \cdot \frac{\Delta x^3}{2!} + \cdots$$

liegt. Und da diese Grenzreihen mit einem und demselben ersten Gliede $y \cdot \Delta x$ anfangen, so kann nach (N. 36.) Δf nicht zwischen ihnen liegen, wenn solches nicht auch mit $y \cdot \Delta x$ anfängt. Es fängt aber Δf mit $\partial f_x \cdot \Delta x$ an; also muß

$$\partial f_x = y \quad \text{oder} \quad df_x = y \cdot dx,$$

mithin $f_x = \int y \cdot dx$ seyn.

Und weil für x = a der Inhalt BDPM auf die bloße Linie BD sich zurückzieht, also verschwindet, so muß dieses Integral mit x = a anfangen, so daß man hat

$$BDPM = f_x = \int_{x \div a} y \cdot dx. \qquad \text{(Vgl. §. 157.)}$$

Anmerkung 1. Nach Leibnitzens Differenzial-Rechnung ist PQ $= dx$ gedacht, und MN ist dann eine der unendlich vielen unendlich kleinen Seiten, aus denen die Kurve besteht, und

das Differenzial $df_x =$ dem Trapez MNPQ,

dessen eine der parallelen Seiten y, die andere $y + dy$ ist, so daß der Inhalt desselben $\frac{y+(y+dy)}{2} \cdot dx$ d. h. $y \cdot dx + \frac{1}{2} dx \cdot dy$ oder bloß $y \cdot dx$ wird, weil $dx \cdot dy$ gegen das bloße dx selber wieder im Moment des Verschwindens ist, daher im Sinne der Differenzial-Rechnung außer Acht gelassen wird. Also findet sich wiederum, wie oben auch:

$$df_x = y \cdot dx.$$

Anmerkung 2. Nach der „Methode der Grenzen" würde man wiederum anerkennen, daß Δf zwischen den Rechtecken (Fig. 12.) PQMO oder $y \cdot \Delta x$ und PQNR oder $y_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$ liegt, daß also der Quozient

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \text{ zwischen } \frac{y \cdot \Delta x}{\Delta x} \text{ und } \frac{y_{x+\Delta x} \cdot \Delta x}{\Delta x}$$

$$\text{d. h. zwischen } y \text{ und } y_{x+\Delta x}$$

liegen müsse für jeden noch so klein gedachten Werth von Δx. Weil aber letztere Ausdrücke y und $y_{x+\Delta x}$ an der Grenze des Werthes von Δx, d. h. für $\Delta x = 0$, einander gleich und $= y$ werden, so muß nach (N. 37. Anmerkung) auch $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ an der Grenze des Werthes von Δx, d. h. es muß $\frac{df}{dx}$ diesem y gleich seyn; also daß man hat

$$\frac{df}{dx} = y \quad \text{und} \quad f = \int y \cdot dx.$$

51.

Ist die Länge des Bogens DM zu finden, während D ein bestimmter durch den Abscissen-Werth $x = a$ gegebener Punkt ist, M dagegen ein noch unbstimmter, dessen Abscissen-Werth x noch jeder seyn kann; so ist diese Länge DM offenbar von x abhängig, also

eine Funktion von x, welche durch ψ_x bezeichnet werden kann. — Wird nun $PQ = \Delta x$ nicht größer gedacht, als daß zwischen M und N die Ordinaten fortwährend wachsen oder fortwährend abnehmen, so sind die zwischen den (verlängerten) Ordinaten-Richtungen PM und QN liegende Stücke der Tangente an M und an N, nämlich MU und NV, allemal Grenzen zwischen denen der Bogen MN liegen muß, wie Archimedes bewiesen hat. *)

Nun ist aber

1) $MU = (\sqrt{1+\partial y_x^2})\cdot\Delta x$, weil $MO = \Delta x$ und $Tg\,UMO = \partial y_x$, folglich $UO = \partial y_x \cdot \Delta x$ ist. — Und eben deshalb ist auch

$$2)\quad VN = (\sqrt{1+(\partial y_x)^2_{x+\Delta x}})\cdot\Delta x$$
$$= (\sqrt{1+\partial y_x^2})_{x+\Delta x}\cdot\Delta x$$
$$= (\sqrt{1+\partial y_x^2})\cdot\Delta x + \partial(\sqrt{1+\partial y_x^2})_x\cdot\Delta x^2$$
$$+\partial^2(\sqrt{1+\partial y_x^2})_x\cdot\frac{\Delta x^3}{2!}+\cdots$$

Und 3) $Bog.MN = \partial\psi_x\cdot\Delta x + \partial^2\psi_x\cdot\frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3\psi_x\cdot\frac{\Delta x^3}{3!}+\cdots$.

Da nun die Reihe (3.) allemal zwischen den Reihen (1. u. 2.)

---

*) Es ist nämlich (Fig. 21.) die Sehne MN kleiner als Bogen MN, aber größer als NV, weil nach der Voraussetzung W. PVN ein stumpfer ist; also ist auch Bog. MN > NV.

Auf der andern Seite ist ML + LN > Bog. MN; aber LU < LN (weil W. VNU stumpf ist); also auch MU > ML + LN, und daher auch MU > Bog. MN.

Es ist aber deshalb Bog. MN > Sehne MN, weil jede über MN beschriebene gebrochene Linie, also auch diejenige, welche sich dem Bogen MN immer und ohne Aufhören nähert, größer ist als die gerade Linie MN. — Und es ist ML + LN > Bog. MN, weil im △MLN, die Summe zweier Seiten ML + LN nicht nur größer ist, als die dritte MN, sondern auch größer ist, als jede über MN, aber innerhalb des Dreiecks MLN beschrieben gedachte gebrochene Linie, wenn letztere lauter nach MN hin gerichtete Winkel hat, d. h. lauter einwärtsgehende Winkel und keinen einzigen auswärtsgehenden.

liegt, für jedes noch so klein gedachte Δx, und da die Grenzreihen (1. u. 2.) mit demselben ersten Gliede $\sqrt{1+\partial y_x^2}$ anfangen, so muß auch die zwischenliegende mit demselben ersten Gliede anfangen nach (N. 36.); also muß seyn

$$\partial\psi_x = \sqrt{1+\partial y_x^2} \quad \text{oder} \quad \frac{d\psi}{dx} = \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

oder $$d\psi = \sqrt{dx^2+dy^2} \text{ oder } \partial\psi_{(v)} = \sqrt{\partial x_v^2+\partial y_v^2}, \text{ *)}$$

also auch $$\psi_x = \int\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx$$

oder $$\psi_x = \int\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot dx,$$

welches Integral jedoch, da es den Bogen DM ausdrückt, desto kleiner werden muß, je näher x dem Werth a kommt, also mit x = a Null werden, d. h. mit x = a anfangen muß, so daß man hat:

$$DM = \psi_x = \int_{x \div a}\sqrt{1+\partial y_x^2}\cdot dx = \int_{x \div a}\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot dx.$$

Anmerkung 1. Die Methode der Grenzen geht wieder von dem Satze aus, daß der Bogen MN oder $\Delta\psi$ allemal zwischen MU und VN liegen müsse, also $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ allemal zwischen $\frac{MU}{\Delta x}$ (oder *Sec* UMO) und $\frac{VN}{\Delta x}$ (oder *Sec* SVN), wenn VS mit OM parallel genommen wird. Weil aber, je kleiner Δx wird, d. h. je näher der Punkt N an M rückt, desto näher auch die beiden Tangenten MU und VN, folglich auch die Winkel UMO und

---

*) Wenn man die runden ∂, welche immer Ableitungen oder Differenzial-Quozienten bedeuten, von den stehenden d, welche Differenzialien andeuten, genau unterscheidet, und wenn hier x selber noch (also auch y und auch ψ) als Funktion von v angesehen und die Ableitungen nach v genommen werden; weil $\partial\psi_v = \partial\psi_x \cdot \partial x_v$, $\partial y_v = \partial y_x \cdot \partial x_v$ ist, während man ohne dies $\partial\psi_x = \frac{d\psi}{dx}$, $\partial y_x = \frac{dy}{dx}$, rc. rc. hat.

NVS, welche solche mit der Axe AX machen, zusammenrücken, und weil zuletzt, an der Grenze des Werthes von Δx, d. h. für $\Delta x = 0$, die beiden Tangenten wirklich zusammenfallen, so ist nach (N. 37. Anmerkung) $\frac{\Delta\psi}{\Delta x}$ an dieser Grenze von Δx, d. h. für $\Delta x = 0$, also jetzt $\frac{d\psi}{dx}$, nothwendig

$$= Sec\,\text{NMO} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \text{ folglich}$$

$$d\psi = \left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)\cdot dx \text{ und}$$

$$\psi = \int\left(\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\right)\cdot dx.$$

Oben im Texte wie hier in der Anmerkung, konnte man aber auch statt der zweiten Grenze VN lieber die Sehne MN nehmen, weil der Bogen MN auch immer zwischen der Sehne MN und der Tangente MU liegt. Man kommt dann jedesmal, sowohl oben im Texte, wie hier, zu demselben Endresultat.

Endlich begnügt sich der gewöhnliche Vortrag der „Methode der Grenzen" wohl auch damit, bloß die eine der Grenzen des Bogens zu nehmen, die andere ganz unbeachtet zu lassen, und nun nachzuweisen, daß das Verhältniß des Bogens zur Sehne der 1 immer näher rücke, je kleiner $\Delta x = 0$ gedacht wird, daher an der Grenze, d. h. für $\Delta x = 0$, mit der 1 zusammenfalle.

Anmerkung 2. Nach der Leibnitz'schen Differenzial-Rechnung wird die Kurve als ein unendliches Vieleck angesehen, das Differenzial dx als der Zuwachs der Abscisse von einem Endpunkt M bis zu dem nächsten N; also ist nach dieser Ansicht, weil M und N selber dicht an einander liegen, Bogen MN identisch mit Sehne MN; während $PQ = dx$, $ON = dy$, also $MN = \sqrt{dx^2+dy^2}$ ist; also daß man sogleich hat

$$d\psi = \sqrt{dx^2+dy^2}, \quad \text{und} \quad \psi_x = \int\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}\cdot dx,$$

welches Integral mit $x = a$ anfangen muß.

52.

I. In der durch $y^2 = cx$ gegebenen Parabel (Fig. 12.) hat man

$$\text{Inhalt } f_x = \int_{x+a} c^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot dx = \tfrac{2}{3} c^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{2}{3} c^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}}$$
$$= \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{2}{3}a \cdot (y)_a.$$

Und für $a = 0$, Inhalt $APM = \frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}APME$.

Um den Bogen zu finden hat man erstlich

$$\partial y_x = -\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{x}}, \quad \text{also} \quad 1 + \partial y_x^2 = \frac{4x+c}{4x};$$

und
$$\psi_x = \int \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}cx}}{x} \cdot dx$$
$$= \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}cx} - \tfrac{1}{8}c \cdot log\,(2x + \tfrac{1}{4}c - 2\sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}cx});$$

also Bog. $AM = \psi_x - (\psi)_0$
$$= \sqrt{x^2 + \tfrac{1}{4}cx} - \tfrac{1}{8} \cdot log \frac{2x + \frac{1}{4}c - 2\sqrt{x^2 + \frac{1}{4}cx}}{\frac{1}{4}c}.$$

II. Der Inhalt der durch die Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$ gegebenen Ellipse (Fig. 10.), wo $AP = x$, $PM = y$ ist, wird gefunden
$$= \int \frac{b}{a}\sqrt{2ax - x^2} \cdot dx = \frac{b}{a}\int \sqrt{2ax - x^2} \cdot dx;$$

also
$$APM = -\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}(a-x)\sqrt{2ax - x^2} + \tfrac{1}{2}ab \cdot \frac{1}{Cos}\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

wenn dieser Inhalt mit $x = 0$ anfangend gedacht wird. Für $x = a = AC$ wird hieraus $ACD = \frac{1}{4}ab\pi$, folglich der Inhalt der ganzen Ellipse $= ab\pi$.

Und der Bogen wird gefunden, wenn man zuerst

$$\partial y_x = \frac{b}{a} \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}},$$

$$\sqrt{1 + \partial y_x^2} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + 2a(a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(2ax - x^2)}},$$

mithin

$$\text{Bog. } AM = \frac{1}{a}\int \sqrt{\frac{a^2b^2 + 2a(a^2 - b^2)x - (a^2 - b^2)x^2}{2ax - x^2}} \cdot dx,$$

welches Integral jedoch bis jetzt in endlicher Form nicht hat hergestellt werden können, und eines von denen ist, welche unter dem Namen der elliptischen Transzendenten, bereits vielfach zu behandeln versucht worden sind.

Anmerkung 1. Denkt man sich (Fig. 10.) über die Ellipse ADB mit AC = a eine Kreislinie AdB beschrieben, so ist ihre Gleichung, auf dieselben Axen bezogen,

$$y' = \sqrt{2ax - x^2},$$

während die Gleichung der Ellipse ist

$$y = \frac{b}{a} \cdot \sqrt{2ax - x^2} = \frac{b}{a} \cdot y'.$$

Dann ist

$$\text{Inhalt } AmP = \int y' \cdot dx,$$

$$\text{Inhalt } AMP = \frac{b}{a} \int y' \cdot dx;$$

also

$$AmP : AMP = a : b = mP : MP,$$

durch welche Proportionen die Inhalte der Ellipse und des Kreises, so wie auch ihre Ordinaten, aus einander abgeleitet werden können.

Anmerkung 2. Wird die Ellipse ein Kreis, ist also a = b, so wird

$$\text{Bog. } AM = a \int \frac{dx}{\sqrt{2ax - x^2}} = a \cdot \frac{1}{Sin} \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{a} = a \cdot \frac{1}{Sin} \frac{y}{a}.$$

Und für den Radius a = 1, wenn dann der Bogen AM durch φ bezeichnet wird:

$$\varphi = \frac{1}{Sin} y \quad \text{oder} \quad y = Sin\,\varphi.$$

Und so findet sich, daß die im zweiten Theile dieses Systems unter dem Namen $Sin\,\varphi$ eingeführte Funktion

$$\frac{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{2i} \quad \text{oder} \quad \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \dots\dots$$

nichts anders ist als y, d. h. nichts anders vorstellt, als die im

Kreise, dessen Radius $= 1$ ist, vom Endpunkte M des Bogens AM auf den Radius AC herabgefällte senkrechte Linie MP oder y; während dann, weil $CP^2 + PM^2 = 1$ ist, $CP = \sqrt{1 - Sin\,\varphi^2} = Cos\,\varphi$ wird, so daß also die unter dem Namen $Cos\,\varphi$ eingeführte Funktion

$$\frac{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}}{2} \text{ oder } 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots,$$

im Kreise, dessen Radius $= 1$ ist, wenn Bog. AM $= \varphi$ gesetzt wird, die vom Mittelpunkt C ausgehende und bis zur Ordinate MP hinreichende Linie CP ist.

Man sieht hieraus, wie die allgemeinen Funktionen (Zusammensetzungen) $Sin\,\varphi$, $Cos\,\varphi$, welche für jeden reelen (positiven oder negativen) und auch für jeden imaginären Werth von φ Bedeutung haben, in dem besondern Falle, wo φ positiv ist und die Länge eines Kreisbogens für den Radius 1 vorstellt, durch Linien in demselben Kreise versinnlicht erscheinen. — Wenn man daher gewöhnlich von diesen speziellen Begriffen der $Sin\,\varphi$ und $Cos\,\varphi$ in den Elementar-Lehrbüchern, ausgeht, um sich nach und nach zu den allgemeineren Funktionen, wie sie in der Rechnung gebraucht werden, zu erheben, so durchläuft man, in Bezug auf das Praktische, denselben Weg, aber in umgekehrter Ordnung, gewinnt auf der einen Seite für den ersten Anfänger mehr Anschaulichkeit in der Darstellung, verliert dagegen auf der andern Seite die wissenschaftliche Einheit des Vortrags, welche, zuletzt wenigstens, dem Menschen von wissenschaftlicher Bildung das dringendste Bedürfniß werden muß. — Es mag daher gut seyn, daß man anfänglich die Mathematik so treibe, wie sie der Vfr. in seiner „reinen Elementar-Mathematik, Berlin 1825—1826" hingestellt hat, nachher aber, wenn man an ein konsequentes Denken gewöhnt ist, solche nach dem gegenwärtigen System noch einmal von vorn herein durchnehme.

53.

Wollte man Polar-Koordinaten (Fig. 12.) $r = FM$ und $v = \text{W. } FMX$ einführen, welche durch die Gleichungen

1) $y = r \cdot Sin\,v$ und 2) $x = \alpha - r \cdot Cos\,v$, (wo $AF = \alpha$) mit den rechtwinklichen Koordinaten $AP = x$ und $PM = y$ desselben Punktes M der Kurve zusammenhängen, so hätte man

$$\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \cdot dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dr^2 + r^2 \cdot dv^2};$$

folglich der Bogen derselben Kurve auch

$$(I.) \ldots \qquad = \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2} \cdot dv,$$

welche Formel bequem ist, wenn die Kurve durch eine Gleichung zwischen Polar-Koordinaten gegeben seyn sollte.

Eben so ist dann

$$y \cdot dx = r \cdot Sin\,v \cdot (-dr \cdot Cos\,v + r \cdot Sin\,v \cdot dv);$$

folglich der Inhalt der Kurve, nämlich (Fig. 12.)

$$APM = \int \left(-r \cdot Sin\,v \cdot Cos\,v \cdot \frac{dr}{dv} + r^2 \cdot Sin\,v^2\right) \cdot dv$$

$$= \int r \cdot Sin\,v \cdot Cos\,v \cdot dr - \int r^2 \cdot Sin\,v^2 \cdot dv.$$

Nun ist aber nach der Formel

$$\int \varphi \cdot d\psi = \varphi\psi - \int \psi \cdot d\varphi,$$

wenn $r \cdot dr = d\psi$ und $Sin\,v \cdot Cos\,v = \varphi$ gedacht wird,

$$\int r \cdot Sin\,v \cdot Cos\,v \cdot dr$$

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \cdot Sin\,v \cdot Cos\,v - \int \tfrac{1}{2} r^2 \cdot (Cos\,v^2 - Sin\,v^2) \cdot dv;$$

also, weil $Cos\,v^2 + Sin\,v^2 = 1$ ist,

$$\text{Inhalt } APM = -\tfrac{1}{2} r^2 \cdot Sin\,v \cdot Cos\,v + \int \tfrac{1}{2} r^2 \cdot dv.$$

Weil jedoch der Inhalt des Dreiecks

$$MFP = \tfrac{1}{2} PF \cdot PM = -\tfrac{1}{2} r^2 \cdot Sin\,v \cdot Cos\,v$$ ist,

so bleibt der Inhalt

$$(II.) \ldots \; AFM = \int \tfrac{1}{2} r^2 \cdot dv = \tfrac{1}{2} \int r^2 \cdot dv$$ übrig,

welche Formel ebenfalls bequemer ist, sobald die Gleichung der Kurve durch Polar-Koordinaten gegeben seyn sollte. *)

---

*) Daß der Inhalt $APM = \frac{1}{2} \int r^2 \cdot dv$ und Bog. $AM = \int \sqrt{\frac{dr^2}{dv^2} + r^2} \cdot dv$ ist, konnte man auch direkt finden.

54.

Ist $\varphi_{x,y,z} = 0$ die Gleichung für eine krumme Fläche, welche sich auf die Koordinaten-Ebenen XAY, XAZ und YAZ der (Fig. 20.) bezieht, und soll der Inhalt des Körpers gefunden werden, welcher von zweien auf der Axe AX senkrechten und von der Ebene YAZ beziehlich um $x = a$ und $x = x$ abstehenden Ebenen, die durch E_a und E_x bezeichnet seyn mögen, begrenzt wird, so ist solcher Inhalt offenbar eine Funktion von x, welche durch F_x bezeichnet seyn mag. Denkt man sich nun x um Δx wachsend, so daß die Ebene E_x in die neue Ebene $E_{x+\Delta x}$ übergeht, so ist der Zuwachs dieses körperlichen Inhalts F_x, nämlich

$$\Delta F_x = \partial F_x \cdot \Delta x + \partial^2 F_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 F_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots.$$

Ist nun Δx nicht größer gedacht, als daß die mit E_x parallelen Durchschnittsflächen zwischen E_x und $E_{x+\Delta x}$ beständig wachsen oder beständig abnehmen, so sind

$$E_x \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad E_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$$

die Inhalte zweier als Zylinder betrachteter Körper, welche als Grenzen angesehen werden können, zwischen denen nothwendig der Zuwachs ΔF_x liegt. Daraus folgt aber genau, nach (N. 36.),

$$\text{I.} \quad \partial F_x = E_x \quad \text{oder} \quad F_x = \int_{x \div a} E_x \cdot dx.$$

Es bleibt nun bloß übrig den Schnitt E_x noch zu finden. Weil aber, wenn man x als völlig gegeben ansieht, nach (N. 35.) die Gleichung $\varphi_{x,y,z} = 0$ zu gleicher Zeit die Gleichung dieses Schnit-

---

Läßt man nämlich den Winkel $v = AFM$, um h wachsen, oder um dv, so daß W. $AFN = v + dv$ wird, so wächst der Bogen AM um MN, und $AM = r$ um $AN - AM = dr$, und Inhalt AFM um MFN. — Nun liegt aber dieser letztere Zuwachs MFN offenbar zwischen zwei Kreis-Sektoren, welche den Zentri-Winkel MFN haben, von denen aber der eine den Radius $AM = r$, der andere dagegen den Radius $AN = r + dr$ hat, und deren Inhalte beziehlich $\frac{1}{2}r^2 \cdot dv$ und $\frac{1}{2}(r + dr)^2 \cdot dv$ sind. — Und eben so ist Bogen MN als Hypotenuse anzusehen, wo Bog. $r \times dv$ die eine Kathete und dr die andere Kathete ist.

tes E_x ist, zwischen den Koordinaten y und z, die auf, in derselben Schnittebene liegende Axen bezogen werden können, so hat man nach (N. 49.)

$$\text{II.}\quad E_x = \int z_y \cdot dy,$$

wo das Integral zwischen denjenigen Werthen von y genommen werden muß, welche den Grenzen des Schnittes E_x entsprechen.

Daher schreibt man auch häufig

$$\text{III.}\quad F_x = \int\int z \cdot dy \cdot dx$$

und sagt, „der Inhalt F_x des Körpers wäre ein doppeltes Integral."

Ist z. B. der Inhalt der Kugel zu finden, deren Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

ist, so ist

$$E_x = \int \sqrt{(r^2 - x^2) - y^2} \cdot dy$$

$$= \tfrac{1}{2} y \cdot \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} + \tfrac{1}{2}(r^2 - x^2) \cdot \frac{1}{Sin} \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

und wenn man dieses Integral nimmt, von $y = 0$ bis zu $y = y'$, unter y' den Werth der Abscisse y verstanden, für welchen die Ordinate z des Schnittes $= 0$, so daß $y' = \sqrt{r^2 - x^2}$ ist, also bis dahin, wo der Schnitt selbst die Abscisse y begrenzt, so findet sich dieser Schnitt

$$E_x = \int_{y' + 0} \sqrt{(r^2 - x^2) - y^2} \cdot dy = \tfrac{1}{4}(r^2 - x^2)\pi.$$

Dann wird aber

$$F_x = \int \tfrac{1}{4}\pi \cdot (r^2 - x^2) \cdot dx = \tfrac{1}{4}\pi(r^2 x - \tfrac{1}{3}x^3);$$

und wenn man dieses Integral von $x = 0$ bis $x = r$ nimmt,

$$F_x = \tfrac{1}{6}\pi \cdot r^3.$$

Weil aber die Koordinaten-Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, so theilen solche die Kugel in 8 kongruente Theile, von denen jeder das eben gefundene F_x ist, so daß der Inhalt der ganzen Kugel $= \tfrac{4}{3} r^3 \cdot \pi$ gefunden wird.

55.

Und soll von demselben, durch die Gleichung $\varphi_{x,y,z} = 0$ gegebenen Körper die krumme Oberfläche gefunden werden, welche

zwischen zweien Paaren, mit den Koordinaten-Ebenen YAZ und XAZ parallelen Ebenen E_a, E_x und E_b, E_y liegt, so fällt sogleich in die Augen, daß solche eine Funktion von x und von y ist, daher auch durch

$$\psi_{x,y}$$

bezeichnet werden kann. Vermehrt man nun x um $k\cdot\delta x$ so vermehrt sich ψ um

$$\Delta\psi = \partial\psi_x\cdot\delta x\cdot k + \partial^2\psi_x\cdot\delta x^2\cdot\frac{k^2}{2!} + \partial^3\psi_x\cdot\delta x^3\cdot\frac{k^3}{3!} + \cdots$$

und dies ist der Theil der Oberfläche, welcher zwischen den beiden parallelen Ebenen E_x und $E_{x+k\cdot\delta x}$ liegt. — Läßt man nun hierin wiederum y um $k\cdot\delta y$ wachsen, so wächst dieser Zuwachs $\Delta\psi$ oder

$$\partial\psi_x\cdot\delta x\cdot k + \partial^2\psi_x\cdot\delta x^2\cdot\frac{k^2}{2!} + \partial^3\psi_x\cdot\delta x^3\cdot\frac{k^3}{3!} + \cdots$$

wiederum um

$\Delta\Delta\psi$ oder $\partial(\partial\psi_x)_y\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot k^2 +$ die Glieder mit den höhern Potenzen von k; und dieser Zuwachs drückt die Oberfläche aus, welche zwischen den 2 Paaren paralleler Ebenen E_x und $E_{x+k\cdot\delta x}$, und dann wiederum E_y und $E_{y+k\cdot\delta y}$ liegt.

Denkt man sich nun an den Punkt M, dessen Koordinaten x, y und z sind, eine Berührungsebene, deren Gleichung

$$z' - z = \partial z_x\cdot(x'-x) + \partial z_y\cdot(y'-y)$$

ist; und kennt man den Satz, daß jede begrenzte Figur in jeder Ebene allemal gleich ist der Quadrat-Wurzel aus der Summe der Quadrate ihrer 3 Projektionen auf die 3 Koordinaten-Ebenen, *) so hat man das zwischen denselben beiden Paaren paralleler

*) Ist nämlich a eine solche Figur in einer beliebigen Ebene, welche mit den 3 Projektions-Ebenen die Winkel α, β, γ macht, und sind a_1, a_2, a_3 die 3 Projektionen von a auf dieselben Koordinaten-Ebenen, so hat man

$$Cos\,\alpha = \frac{a_1}{a}, \quad Cos\,\beta = \frac{a_2}{a}, \quad Cos\,\gamma = \frac{a_3}{a}$$

Ebenen E_x und $E_{x+k\cdot\delta x}$, E_y und $E_{y+k\cdot\delta y}$ liegende Stück der berührenden Ebene offenbar

$$= \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot k^2,$$

welches zu gleicher Zeit dem obigen Stück $\Delta\Delta\psi$ der krummen Oberfläche desto näher rücken muß, je kleiner k gedacht wird. — Begnügt man sich daher hier, um weitläufige Rechnungen zu vermeiden, mit dieser einzigen Grenze, so kann man folgern, daß

$$\partial(\partial\psi_x)_y = \sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2},$$

also $$\partial\psi_x = \int\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\cdot dy,$$

folglich auch

$$\psi_x = \int\int\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2}\cdot dy\cdot dx$$

seyn müsse; jedes Integral zwischen den der Natur der einzelnen Gegenstände entsprechenden Grenzen von y und x genommen.

Wenden wir dies auf die obige durch

$$x^2+y^2+z^2 = r^2$$

gegebene Kugel an, so findet sich, nach x und dann nach y differenziirend,

$$x+z\cdot\partial z_x = 0 \quad \text{und} \quad y+z\cdot\partial z_y = 0;$$

folglich

$$\sqrt{1+\partial z_x^2+\partial z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \sqrt{\frac{r^2}{z^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Demnach wird

$$\partial\psi_x = \int\frac{r\cdot dy}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = r\cdot\overset{1}{Sin}\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

und

$$(\partial\psi_x)_{y'\div 0} = r\cdot\overset{1}{Sin}\frac{y'}{\sqrt{r^2-x^2}} = \tfrac{1}{2}r\pi,$$

wenn $y' = \sqrt{r^2-x^2}$ (für $z = 0$ aus der Gleichung der Kugel) genommen wird.

---

während nach (N. 34.)

$$Cos\,\alpha^2+Cos\,\beta^2+Cos\,\gamma^2 = 1 \qquad \text{seyn muß,}$$

woraus dann sogleich

$$a = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \qquad \text{hervorgeht.}$$

Daraus folgt aber dann weiter

$$\psi_x = \int \tfrac{1}{2} r\pi \cdot dx = \tfrac{1}{2} r\pi x$$

und

$$(\psi_x)_{r+0} = \tfrac{1}{2} r^2 \pi,$$

welches wiederum der von den 3 durch den Mittelpunkt der Kugel hindurchgehenden Ebenen begrenzte (also der 8te) Theil der gesammten Oberfläche ist. Die gesammte Oberfläche der Kugel findet sich daher hieraus

$$= 4r^2\pi,$$

während r der Radius und $r^2\pi$ der Inhalt des größten Kreises der Kugel ist.

Anmerkung. Man hat bisher zu oft Gelegenheit gehabt zu sehen, wie in allen diesen Anwendungen die Ableitungsrechnung, die Methode der Grenzen und die Differenzial-Rechnung dem Wesen nach einerlei Amt ausüben, weshalb in den beiden letztern Nummern, um Raum zu ersparen, nur der eine Weg verfolgt worden ist, jedoch in der letzten Nummer mit einer Abweichung, welche in Form von Ableitungsrechnung der gewöhnliche Weg der Differenzial-Rechnung ist, nur daß letztere dx, dy statt $k \cdot \delta x$, $k \cdot \delta y$ setzt, dabei aber annimmt, daß alle höheren Dimensionen von dx, dy gegen das Produkt $dx \cdot dy$ verschwinden, und dabei auch die berührende Ebene selbst, in dem Theil, dessen eine Projektion $1 \cdot dx \cdot dy$ ist, als einen Theil der krummen Oberfläche ansieht, also die krumme Oberfläche als aus unendlich vielen unendlich kleinen ebenen Flächen zusammengesetzt sich denkt.

56.

Ehe wir diese Abtheilung verlassen, wollen wir, um noch eine instruktive Anwendung der Differenzial-Rechnung zu geben, zuletzt noch die Theorie der Evoluten und Evolventen vortragen, jedoch nur für Kurven, welche ganz mit allen ihren Punkten in einer und derselben Ebene liegen.

Da in (NN. 42.—45.) für jeden andern Werth von x ein anderer Krümmungskreis gefunden wird, d. h. andere Werthe für die Koordinaten a und b des Mittelpunktes und somit auch ein anderer Radius c, so bilden diese zu verschiedenen Werthen

von x gehörigen Mittelpunkte der Krümmnngskreise selber wieder eine Linie, deren Gleichung gewünscht werden kann, und welche die Mittelpunkts-Kurve genannt werden könnte.

Eliminirt man aber aus den Gleichungen (N. 45. 1—3.), nämlich aus

$$1)\qquad (y-b)^2+(x-a)^2 = r^2,$$

$$2)\qquad (y-b)\cdot\partial y_x+(x-a) = 0,$$

$$3)\qquad (y-b)\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x{}^2+1 = 0,$$

sowohl c als auch x (nachdem statt y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ bereits die aus $F_{x,y} = 0$ dafür gezogenen Funktionen von x, gesetzt worden sind), so erhält man gerade die Gleichung zwischen b und a, für jedes x, also die Gleichung zwischen den Koordinaten-Werthen a und b aller, zu beliebigen Werthen von x gehörigen Mittelpunkte der Krümmungskreise. Weil aber (2. u. 3.) bereits c nicht mehr enthalten, so wird die Gleichung der Mittelpunkts-Kurve bloß aus (2. u. 3.) durch Elimination von x gefunden.

Will man nun an diese Mittelpunkts-Kurve, deren Gleichung zwischen a und b aus (2. u. 3.) d. h. aus

$$2)\qquad (y_x-b)\cdot\partial y_x+(x-a) = 0,$$

$$3)\qquad (y_x-b)\cdot\partial^2 y_x+\partial y_x{}^2+1 = 0$$

durch Elimination von x erhalten wird, und zwar in dem Punkte, dessen Koordinaten-Werthe a und b zu einem gegebenen Werth von x gehören, eine geradlinige Tangente haben, so ist, wenn x_2 und y_2 die Koordinaten-Werthe der einzelnen Punkte dieser Tangente vorstellen, die Gleichung dieser Tangente offenbar nach (N. 40.)

$$4)\qquad y_2-b = \partial b_a\cdot(x_2-a),$$

wo man jedoch, da b in a nicht direkt gegeben ist, sondern da man in den Gleichungen (2. u. 3.) nur b und a als Funktionen von x gegeben hat, die Ableitung ∂b_a dadurch findet, daß man diese Gleichungen (2. u. 3.) (die identisch sind für jedes x, sobald statt b und a, die durch diese Gleichungen selbst vorgestellten und gegebenen Funktionen b_x und a_x von x, gesetzt werden) nach

allem x ableitet (differenziirt), um ∂b_x und ∂a_x zu erhalten, und dann nach (§. 59.)

$$5) \quad \partial b_a = \frac{\partial b_x}{\partial a_x}$$

nimmt.

Differenziirt man aber die Gleichungen (2. u. 3.) nach allem x, in dem eben bemerkten Sinne, wo b und a als die durch diese Gleichungen gegebenen Funktionen von x angesehen werden, so kann man erst nach allem dem x differenziiren, was außerhalb und in y_x, ∂y_x, $\partial^2 y_x$ vorkommt, dann aber auch nach dem x, was in a und b vorkommt, und beide Resultate addiren, nach (§§. 62. 70. ꝛc. ꝛc.). Geschieht dies zuerst für die (2.), so erhält man

$$[(y_x - b) \cdot \partial^2 y_x + \partial y_x^2 + 1] + [-\partial b_x \cdot \partial y_x - \partial a_x] = 0,$$

welche Gleichung, weil der erste Theil (nach 3.) ohnedies 0 ist, in

$$6) \quad \partial b_x \cdot \partial y_x + \partial a_x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial b_x}{\partial a_x} = -\frac{1}{\partial y_x}$$

übergeht, so daß diese allein dasmal schon das verlangte, nämlich

$$7) \quad \partial b_a = -\frac{1}{\partial y_x}$$

liefert, und eine weitere Differenziirung der Gleichung (3.) gar nicht mehr nöthig ist.

Es ist daher die Gleichung (5.) für die gesuchte Tangente der Mittelpunkts-Kurve jetzt

$$8) \quad y_2 - b = -\frac{1}{\partial y_x} \cdot (x_2 - a),$$

und solche zeigt nach (N. 41.), daß diese Tangente der Mittelpunkts-Kurve auf der Tangente der gegebenen Kurve $F_{x,y} = 0$ in dem zu x gehörigen Punkte, senkrecht steht, also mit der Normale der Kurve $F_{x,y} = 0$ zusammenfällt. *)

---

*) Das letztere ist deshalb nothwendig, weil der Krümmungshalbmesser an dem zu x gehörigen Punkt der Kurve $F_{x,y} = 0$, mit der Richtung der Normale zusammenfällt, folglich der Mittelpunkt (a, b) des Krümmungskreises ebenfalls in der Normale liegt, so daß also die

Die Gleichung (1.) gibt zu jedem Punkt (a, b) sogleich noch c d. h. die Länge des von diesem Punkt ausgehenden Krümmungshalbmessers, oder die Länge der Normale bis zur Kurve $F_{x,y} = 0$, so daß c ebenfalls eine Funktion von x wird, und zwar diejenige c_x die aus (1.) d. h. aus

$$1)\quad (y_x - b)^2 + (x - a)^2 = c^2$$

hervorgeht, wenn statt b und a die Funktionen b_x und a_x gesetzt werden. Da aber dann diese Gleichung (1.) für jeden Werth von x identisch Null ist, so gibt sie, nach allem x differenziirt,

$$[(y_x - b)\cdot\partial y_x + (x - a)] - [(y_x - b)\cdot\partial b_x + (x - a)\cdot\partial a_x] = c\cdot\partial c_x;$$

oder, weil die Gleichung (2.) diesen ersten Theil ohnedies zu Null macht,

$$9)\quad (y_x - b)\cdot\partial b_x + (x - a)\cdot\partial a_x = -c\cdot\partial c_x.$$

Und setzt man hier, so wie in (1.), statt x — a den aus (2.) sich dafür ergebenden Werth $-(y_x - b)\cdot\partial y_x$, so wie statt ∂y_x den aus (6.) sich ergebenden Werth $-\frac{\partial a_x}{\partial b_x}$, so reduzirt sich diese Gleichung (9.) auf

$$10)\quad \partial c_x{}^2 = \partial b_x{}^2 + \partial a_x{}^2,$$

oder $$\partial c_a{}^2 = \partial b_a{}^2 + 1,$$

oder $$\partial c_x = \sqrt{\partial b_x{}^2 + \partial a_x{}^2},$$

oder $$\partial c_a = \sqrt{\partial b_a{}^2 + 1},$$

so daß nach (N. 51.) ∂c_a die Ableitung ist, des Bogens der Mittelpunkts-Kurve, nach a genommen.

Daraus folgt aber weiter, daß der Krümmungshalbmesser c entweder die Länge des Bogens der Mittelpunkts-Kurve selbst ist, von einem bestimmten Punkt der letztern abgerechnet, bis zu dem Mittelpunkt des Krümmungskreises hin, oder doch von diesem

---

obige durch die Gleichung (8.) gegebene Tangente, weil sie durch den Punkt (a, b) hindurchgeht, bereits diesen Punkt mit der Normale der Kurve $F_{x,y} = 0$ gemein hat.

Bogen nur um eine konstante Länge verschieden ist. Legt man daher um die Mittelpunkts-Kurve einen Faden, welcher mit dem einen Ende an sie festgemacht ist, so wird das andere Ende, wenn es einmal bis zur Kurve $F_{x,y} = 0$ reicht, bei seinem Abwickeln (während jener immer angespannt bleibt) letztere Kurve $F_{x,y} = 0$ beschreiben. Die Mittelpunkts-Kurve heißt daher die Evolute (Développée) der gegebenen Kurve $F_{x,y} = 0$; und letztere wiederum die Evolvende (Développante) der Mittelpunkts-Kurve.

Zu gleicher Zeit sieht man, daß zu jeder gegebenen Evolute unendlich viele Evolvenden gehören; zu jeder Evolvende dagegen nur eine einzige Evolute. Das letztere ist an sich aus der Rechnung klar; das erstere dagegen deshalb, weil der beschreibende Faden c nur durch ein Differenzial

$$\partial c_a = \sqrt{1 + \partial b_a^2}$$

gegeben ist, folglich wegen der beliebigen Konstante beliebig lang genommen werden kann.

Anmerkung. Da die Theorie der Evoluten aus der Theorie der Oskulation (der Berührung) unmittelbar hervorgeht, so mag letztere nach der Ableitungs-Theorie, oder nach der Differenzial-Rechnung des Leibnitz, oder nach der Methode der Grenzen abgeleitet seyn, es wird die Theorie der Evoluten doch immer aus der schon fertigen Theorie der Oskulation rein analytisch hervorgehen, daher eine besondere Ansicht nicht weiter erfordern, sondern immer, mit Abänderung der Ableitungszeichen in die Differenzial-Zeichen, genau die vorliegende bleiben.

Will man jedoch, so kann man auch die Mittelpunkts-Kurve als durch alle auf einander folgenden Normalen der gegebenen Kurve $F_{x,y} = 0$ gebildet sich denken. Es entsteht dann eine Leibnitzische Kurve, d. h. ein Unendlichvieleck, welches man sich jedoch eben dadurch, daß man nach der Methode der Grenzen, nachdem durch dx gehörig wegdividirt ist, dx wirklich 0 setzt, in eine stetige Kurve übergehend darstellen kann.

Dritte Abtheilung.

Einige der einfachern Anwendungen der Differenzial-Rechnung auf Statik und Mechanik.

57.

In der Statik wird gezeigt, daß wenn beliebig viele unter sich feste Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 .... A_n (deren Koordinaten-Werthe beziehlich x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 und &c. &c., zuletzt x_n, y_n, z_n sind), beziehlich von den parallelen Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n angegriffen werden, dafür eine einzige Kraft P_0 gesetzt werden kann, der Summe aller Kräfte P_1, P_2, ... P_n gleich, und einen Punkt A_0 angreifend, dessen Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 durch die Gleichungen

1) $P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \cdots\cdots + P_n \cdot x_n$,

2) $P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \cdots\cdots + P_n \cdot y_n$,

3) $P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \cdots\cdots + P_n \cdot z_n$

gegeben sind, während

3) $P_0 \quad = P_1 \quad + P_2 \quad + P_3 \quad + \cdots\cdots + P_n$ ist.

Dieser Punkt A_0 (x_0, y_0, z_0) heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte (auch der Schwerpunkt, so oft man sich unter den Kräften Schwerkräfte denkt, die auf alle stetig neben einander liegenden einzelnen Punkte gleich stark wirken).

Liegen alle Angriffspunkte A_1, A_2, ... A_n in einer und derselben Ebene, so kann man diese als Axen-Ebene (der x und y) nehmen, und da dann z_1, z_2, ... z_n alle $= 0$ sind, so ist auch $z_0 = 0$; d. h. der Schwerpunkt liegt dann in derselben Ebene, und wird bloß aus den Gleichungen (1. u. 2.) bestimmt.

Liegen alle Angriffspunkte A_1, A_2, ... A_n in einer und derselben geraden Linie, und nimmt man diese zur Axe der x, so sind auch noch alle die y_1, y_2, ... $y_n = 0$, demnach auch $y_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt dann auch in derselben geraden Linie, und wird bloß durch die Gleichung (1.) bestimmt.

Und auf diese Begriffe gestützt, mögen nun folgende Aufgaben stehen.

58.

Ist nämlich jeder Punkt Q der Linie AB (Fig. 23.), dessen Abscisse AQ = x ist, von einer parallelen Kraft ψ_x angegriffen, und soll man die Summe aller dieser Kräfte von A bis B, d. h. das obige P_0 finden, so verfährt man so:

Diese gesuchte Summe aller der Kräfte ψ_x, die auf die einzelnen Punkte von A bis Q wirken, ist offenbar selbst eine Funktion von x, welche durch S_x bezeichnet seyn mag. Denkt man sich nun x um $\Delta x = QR$ vermehrt, so vermehrt sich S_x um ΔS d. h. um $\partial S_x \cdot \Delta x + \partial^2 S_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 S_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$, welches ΔS also die Summe aller Kräfte ist, welche auf die Punkte von Q bis R wirken. Nimmt man nun Δx nicht größer, als daß ψ_x von ψ_x an bis zu $\psi_{x+\Delta x}$ hin immerfort wächst oder immerfort abnimmt, so daß ψ_x und $\psi_{x+\Delta x}$ (die Kräfte, welche auf die Punkte Q und R wirken,) die größten und kleinsten Kräfte sind, unter allen, welche auf die zwischen Q und R liegenden Punkte wirken, so ist klar, daß die Produkte $\psi_x \cdot \Delta x$ und $\psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$ (welche die Summe aller der zwischen Q und R wirkenden Kräfte vorstellen, wenn auf alle Punkte dieser Entfernung QR = Δx, immerfort die kleinste oder immerfort die größte der wirklich vorhandenen Kräfte einwirkte) Grenzen sind, also Grenzreihen

$$\psi_x \cdot \Delta x$$

und

$$\psi_x \cdot \Delta x + \partial \psi_x \cdot \Delta x^2 + \cdots$$

bilden, zwischen denen das obige

$$\Delta S \quad \text{oder} \quad \partial S_x \cdot \Delta x + \partial^2 S_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots$$

immer liegen muß, so daß nach (N. 36.) nothwendig

$$\partial S_x = \psi_x \quad \text{also} \quad S_x = \int_{x+a} \psi_x \cdot dx$$

seyn muß, wo wir sogleich das mit x = 0 anfangende Integral geschrieben haben, weil solches hier den übrigen Voraussetzungen entspricht.

Wird dann AB $=$ b gesetzt, so ist die Summe aller wirkenden Kräfte von A bis B offenbar $= \int_{b \div 0} \psi_x \cdot dx$.

Anmerkung 1. Die Differenzial-Rechnung des Leibnitz würde dasselbe auf nachstehendem Wege erzielen. Sie würde sich ein Element der Linie AB denken $= dx$, und die auf dasselbe wirkende Kraft $= \psi_x \cdot dx$ setzen, indem sie die Kraft ψ_x auf jeden Punkt dieses (im Moment des Verschwindens befindlichen) Elementes dx als ein und dieselbe bleibend sich denkt. Diese auf das Element dx wirkende Kraft $\psi_x \cdot dx$ ist aber der Zuwachs dS_x der Summe aller Kräfte, während x um dx wächst; also hat man

$$dS_x = \psi_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad S_x = \int \psi_x \cdot dx. \; ^{*)}$$

Anmerkung 2. Die „Methode der Grenzen" würde wiederum zeigen, daß ΔS allemal zwischen $\psi_x \cdot \Delta x$ und $\psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$ liegen müsse, daß also auch

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \text{ zwischen } \psi_x \text{ und } \psi_{x+\Delta x}$$

liege; daß folglich, weil für $\Delta x = 0$ diese beiden Grenzen selbst in ψ_x zusammenfallen, auch dann $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, d. h. jetzt $\frac{dS}{dx}$ mit ψ_x zusammenfallen müsse; nach (N. 36. Anmerkung).

Die Methode der Grenzen würde also hier, dem Wesen nach, wiederum mit dem Verfahren der Ableitungsrechnung zusammenfallen, und sich nur die Entwicklung von ΔS und $\psi_{x+\Delta x}$ in, nach Potenzen von Δx fortlaufende Reihen ersparen.

---

*) Statt dieser Entwicklung kann die Differenzial-Rechnung den Satz ein für allemal entwickelt sich denken, welcher (§. 161. u. §. 161. b.) zu finden ist, daß nämlich $\int_{b \div a} \psi_x \cdot dx$ die Summe aller der Produkte

$$\psi_a \cdot h + \psi_{a+h} \cdot h + \psi_{a+2h} \cdot h + \cdots + \psi_{a+(n-1)h} \cdot h$$

vorstelle, wenn $h = \frac{b-a}{n}$ und n unendlich groß gedacht wird. Dann braucht sie hier nur die Voraussetzung zu Hilfe zu nehmen, daß die Kräfte ψ_a, ψ_{a+h}, ψ_{a+2h}, 2c. 2c. ein Element h (oder dx) hindurch konstant dieselben bleiben, also nur von Element zu Element sich ändern.

59.

Würde nun unter derselben Voraussetzung, wie (N. 58.), die Summe aller der Produkte $x \cdot \psi_x$ gesucht, nämlich das Produkt $P_0 \cdot x_0$ der (N. 57. 1.), so würde man die Summe aller dieser Produkte, in Bezug auf alle zwischen A und Q liegende Angriffspunkte, als eine Funktion von x ansehen müssen und etwa durch

$$M_x$$

bezeichnen können. Wird dann x um $\Delta x = QR$ vermehrt, so vermehrt sich M_x um ΔM d. h. um

$$\partial M_x \cdot \Delta x + \partial^2 M_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 M_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \ldots.$$

Ist nun ψ_x die kleinste und $\psi_{x+\Delta x}$ die größte unter allen den auf die Punkte zwischen Q und R wirkenden Kräften, so sind offenbar

$$x \cdot \psi_x \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad (x + \Delta x) \cdot \psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$$

zwei Grenzen zwischen denen der Zuwachs ΔM liegen muß, und welche in Reihen nach Δx entwickelt mit demselben ersten Gliede $x \cdot \psi_x \cdot \Delta x$ anfangen, so daß man der (N. 36.) zufolge

$$\partial M_x = x \cdot \psi_x \quad \text{oder} \quad M_x = \int x \cdot \psi_x \cdot dx$$

hat, oder

$$M_b = \int_{b \div 0} x \cdot \psi_x \cdot dx,$$

wenn man die Summe aller der über die ganze Linie AB sich erstreckenden Produkte haben will.

Wäre aber ψ_x die größte und $\psi_{x+\Delta x}$ die kleinste unter allen den zwischen Q und R wirkenden Kräften, so wären

$$x \cdot \psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad (x + \Delta x) \cdot \psi_x \cdot \Delta x$$

die beiden Grenzen, zwischen denen ΔM liegen müßte; und der Erfolg wäre dann genau derselbe. — Und jedesmal braucht man sich Δx nicht größer zu denken, als daß eine dieser Voraussetzungen erfüllt ist.

Und dann bestimmt sich die Lage des Schwerpunktes, nach (N. 57. 1.), nämlich

$$x_0 = \frac{\int_{b \div 0} x \cdot \psi_x \cdot dx}{\int_{b \div 0} \cdot \psi_x \cdot dx}.$$

woraus dann die Lage des Schwerpunktes, nämlich x_0 und y_0, nach (N. 57. 1. 2.) sogleich und unmittelbar sich ergibt.

Und leicht ist es nun, diese Resultate auf einen Körper auszudehnen, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$z' = \varphi_{x,y}$$

gegeben ist, und auf dessen einzelne, durch x, y, z gegebene, Punkte eine Kraft $\psi_{x,y,z}$ wirkte. Man würde finden

$$x_0 = \frac{\int\int\int x \cdot \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\int\int\int \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}, \quad y_0 = \frac{\int\int\int y \cdot \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\int\int\int \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx},$$

$$z_0 = \frac{\int\int\int z \cdot \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\int\int\int \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx};$$

wenn nur das erste Integral nach z zwischen den Grenzen genommen wird, innerhalb welcher in der Linie z die Kräfte wirksam gedacht werden; daß zweite Integral nach y dagegen zwischen denjenigen Grenzen der Linie y genommen wird, so wie das dritte Integral nach x zwischen denjenigen Grenzen der Linie x, zwischen denen die Kräfte vorhanden und wirkend gedacht sind.

Soll sich z. B. die Auffindung des Schwerpunktes auf den ganzen Körper erstrecken, der von den 3 Koordinaten-Ebenen und von der krummen Fläche $z' = \varphi_{x,y}$ begrenzt wird, so wird das Integral nach z zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = \varphi_{x,y}$ genommen; dann das Integral nach y, zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = y'$, wenn y' derjenige Werth von y ist, welcher aus $z' = \varphi_{x,y}$, für y sich ergibt, wenn $z' = 0$ wird. Das Integral nach x endlich muß dann zwischen $x = 0$ und demjenigen Werth von x genommen werden, welcher aus $z' = \varphi_{x,y}$ hervorgeht, wenn nicht bloß $z' = 0$, sondern auch noch $y = 0$ gesetzt wird. (Vgl. N. 54.)

61.

Die Bewegung eines Punktes in irgend einer gegebenen Bahn ist bekannt, wenn man zwischen der Zahl t der Sekunden, die während des Anfanges der Bewegung verflossen sind, und der Zahl s der Fuße, welche die Bewegung in dieser Zeit durchlaufen

hat (d. h. allgemeiner gesprochen, zwischen der Zeit t und dem durchlaufenen Raum s), eine Gleichung hat, so daß aus ihr

$$s = s_t$$

gefunden werden kann, unter s_t eine Zusammensetzung aus t verstanden.

Ist diese Gleichung von der einfachsten Form

$$s = c \cdot t,$$

so ist auch noch für eine andere Zeit t', wenn s' den zugehörigen Raum vorstellt,

$$s' = c \cdot t',$$

also auch $$s : s' = t : t'$$

d. h. die Räume dieser Bewegung verhalten sich dann, wie die zugehörigen Zeiten. — In derselben Bewegung finden sich für

$$t = 1, \qquad n-1, \qquad n,$$
$$s = c, \qquad c(n-1), \qquad cn;$$

folglich der in der nten Sekunde beschriebene Raum

$$= cn - c(n-1) = c,$$

d. h. diese Bewegung beschreibt in jeder nten Sekunde dieselbe Zahl c der Fuße, wie in der ersten. — Diese Bewegung selbst wird daher eine konstante genannt, und c oder $\frac{s}{t}$ heißt dabei die Geschwindigkeit dieser konstanten Bewegung.

62.

So wie dagegen die Gleichung

$$s = s_t$$

nicht zu der so eben betrachteten einfachsten Form gehört, so heißt die Bewegung selbst, welche durch dieses Gesetz bestimmt ist, eine veränderliche Bewegung.

Wird in einer solchen veränderlichen Bewegung

$$s = s_t$$

die Zeit t um Δt vermehrt gedacht, so vermehrt sich der Raum um Δs d. h. um

$$\partial s_t \cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \partial^3 s_t \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots.$$

Denkt man sich daher $t = n - 1$, und $\Delta t = 1$, so drückt der dazugehörige Werth von Δs, nämlich

$$(\partial s_t)_{n-1} + (\partial^2 s_t)_{n-1} \cdot \frac{1}{2!} + (\partial^3 s_t)_{n-1} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots$$

den in der $n$ten Sekunde beschriebenen Raum aus, welcher offenbar von der Zahl n selbst abhängig bleibt (so lange nicht $\partial s_t = c$ und $\partial^2 s_t = \partial^3 s_t =$ ꝛc. $= 0$ wird, d. h. so lange nicht der Fall der vorhergehenden Nummer eintritt, also so lange die Bewegung veränderlich genannt wird), also in jeder andern Sekunde im Allgemeinen auch ein anderer seyn wird.

63.

Man kann sich nun zuerst folgende Aufgabe stellen. Es drückt $s = s_t$ das Gesetz einer veränderlichen Bewegung aus; man soll die konstante Bewegung finden

$$s_1 = v \cdot t_1,$$

wo v von t_1 unabhängig gedacht und gesucht wird, welche zu einer gegebenen Zeit τ, d. h. für einen bestimmten Werth von $t_1 = \tau$, unter allen konstanten Bewegungen dieser veränderlichen Bewegung am nächsten kommt.

Es ist aber, wenn t um Δt vermehrt gedacht wird, der, vom Ende der Zeit t ab, in der Zeit Δt bei der veränderlichen Bewegung $s = s_t$ beschriebene Raum

1) $\Delta s = \partial s_t \cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \partial^3 s_t \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots.$

Wenn nun der von der konstanten Bewegung

$$s_1 = v \cdot t_1$$

in der Zeit Δt beschriebene Raum durch Δs_1 bezeichnet wird, so hat man

2) $\Delta s_1 = v \cdot \Delta t,$

und die Differenz der Räume ist daher

$$3)\ \Delta s - \Delta s_t = (\partial s_t - v) \cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots\cdot.$$

Soll nun dieser Unterschied der von beiden Bewegungen in der Zeit Δt, vom Ende der Zeit t ab, beschriebenen Räume, der kleinst möglichste werden, für Δt im Moment des Verschwindens gedacht, so muß man dem v unter allen Werthen denjenigen geben, welcher (für diesen bestimmten Werth τ von t)

$$4)\ \partial s_t - v = 0, \quad \text{also} \quad v = \partial s_t = \frac{ds}{dt}$$

macht, weil dann in obigem Unterschiede $\Delta s - \Delta s_t$, das mit Δt behaftete Glied herausfällt, folglich gegen den Fall, wo solches nicht herausfällt, im Moment des Verschwindens ist.

Die Geschwindigkeit v dieser konstanten Bewegung

$$s_1 = v \cdot t_1,$$

welche zu der Zeit $t = \tau$ mit der veränderlichen Bewegung

$$s = s_t$$

am nächsten zusammenfällt, und welche

$$v = \partial s_t = \frac{ds}{dt}$$

gefunden worden ist, nennt man die (veränderliche) Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung, so daß, diesem Begriff zu Folge, eine solche veränderliche Bewegung zu jeder andern Zeit auch eine andere Geschwindigkeit hat.

Ist z. B. $s = gt^2 + bt$ das Gesetz einer gegebenen veränderlichen Bewegung, so ist

$$v = \partial s_t = \frac{ds}{dt} = 2gt + b$$

die Geschwindigkeit dieser Bewegung. — Und ist hier $b = 0$, so verhalten sich die zu verschiedenen Zeiten τ und τ' gehörigen Geschwindigkeiten v und v' dieser veränderlichen Bewegung

$$s = gt^2,$$

wie diese Zeiten selber, also daß man hat

$$v : v' = \tau : \tau',$$

Dritte Abtheilung.

Einige der einfachern Anwendungen der Differenzial-Rechnung auf Statik und Mechanik.

57.

In der Statik wird gezeigt, daß wenn beliebig viele unter sich feste Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 .... A_n (deren Koordinaten-Werthe beziehlich x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 und zc. zc., zuletzt x_n, y_n, z_n sind), beziehlich von den parallelen Kräften P_1, P_2, P_3, ... P_n angegriffen werden, dafür eine einzige Kraft P_0 gesetzt werden kann, der Summe aller Kräfte P_1, P_2, ... P_n gleich, und einen Punkt A_0 angreifend, dessen Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 durch die Gleichungen

1) $P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \cdots + P_n \cdot x_n$,

2) $P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \cdots + P_n \cdot y_n$,

3) $P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \cdots + P_n \cdot z_n$

gegeben sind, während

3) $P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n$ ist.

Dieser Punkt A_0 (x_0, y_0, z_0) heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte (auch der Schwerpunkt, so oft man sich unter den Kräften Schwerkräfte denkt, die auf alle stetig neben einander liegenden einzelnen Punkte gleich stark wirken).

Liegen alle Angriffspunkte A_1, A_2, ... A_n in einer und derselben Ebene, so kann man diese als Axen-Ebene (der [illegible] nehmen, und da dann z_1, z_2, ... z_n alle $= 0$ [illegible] auch $z_0 = 0$; d. h. der Schwerpunkt liegt dan[illegible] Ebene, und wird bloß aus den Gleichungen (1. [illegible]

Liegen alle [illegible]kte A_1, A_2, [illegible] derselben gerad[illegible] nimmt man [illegible] sind auch n[illegible] y_2, ... [illegible] $y_0 = 0$, [illegible]punkt li[illegible] geraden Lin[illegible] durch [illegible]

$$3)\quad \Delta s - \Delta s_t = (\partial s_t - v)\cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \ldots.$$

Soll nun dieser Unterschied der von beiden Bewegungen in der Zeit Δt, vom Ende der Zeit t ab, beschriebenen Räume, der kleinst möglichste werden, für Δt im Moment des Verschwindens gedacht, so muß man dem v unter allen Werthen denjenigen geben, welcher (für diesen bestimmten Werth τ von t)

$$4)\quad \partial s_t - v = 0, \quad \text{also} \quad v = \partial s_t = \frac{ds}{dt}$$

macht, weil dann in obigem Unterschiede $\Delta s - \Delta s_t$, das mit Δt behaftete Glied herausfällt, folglich gegen den Fall, wo solches nicht herausfällt, im Moment des Verschwindens ist.

Die Geschwindigkeit v dieser konstanten Bewegung

$$s_1 = v \cdot t_1,$$

welche zu der Zeit $t = \tau$ mit der veränderlichen Bewegung

$$s = s_t$$

am nächsten zusammenfällt, und welche

$$v = \partial s_t = \frac{ds}{dt}$$

gefunden worden ist, nennt man die (veränderliche) Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung, so daß, diesem Begriff zu Folge, eine solche veränderliche Bewegung zu jeder andern Zeit auch eine andere Geschwindigkeit hat.

Ist z. B. $s = gt^2 + bt$ das Gesetz einer gegebenen veränderlichen Bewegung, so ist

$$v = \partial s_t = \frac{ds}{dt} = 2gt + b$$

die Geschwindigkeit dieser Bewegung. — Und ist hier $b = 0$, so verhalten sich die zu verschiedenen Zeiten τ und τ' gehörigen Geschwindigkeiten v und v' dieser veränderlichen Bewegung

$$s = gt^2,$$

wie diese Zeiten selber, also daß man hat

$$v : v' = \tau : \tau',$$

wie solches aus den Gleichungen

$$v = 2g\tau \quad \text{und} \quad v' = 2g\tau'$$

augenblicklich hervorgeht.

Anmerkung 1. Die Differenzial-Rechnung des Leibnitz betrachtet jede veränderliche Bewegung, als aus unendlich vielen, eine unendlich kleine Zeit hindurch nur dauernden verschiedenen konstanten Bewegungen gebildet, und hat daher zu Ende irgend einer Zeit $t = \tau$, für die unendlich kleine nächstfolgende Zeit dt, den dazu gehörigen unendlich kleinen Raum ds so, daß, wenn v die Geschwindigkeit dieser jetzigen, dem Zeitpunkt τ entsprechenden konstanten Bewegung ist, die Gleichung

$$ds = v \cdot dt \quad \text{oder} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

statt finden muß, eben weil auch an dieser Stelle die Bewegung als eine konstante Bewegung angesehen wird.

Anmerkung 2. Die Methode der Grenzen, würde sich zuerst die konstante Bewegung

1) $s_1 = v' \cdot t_1$ denken,

welche so ist, daß der von ihr in der bestimmten Zeit $t_1 = \Delta t$ beschriebene Raum $s' = v' \cdot \Delta t$, genau gleich ist dem Raum Δs, welchen die veränderliche Bewegung in derselben bestimmten und gegebenen Zeit Δt beschreiben wird, also daß $\Delta s = s'$ ist, und demnach die Gleichung (1.) in

2) $\Delta s = v' \cdot \Delta t$ oder $v' = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

übergeht. Je kleiner nun Δt gedacht wird, desto mehr nähert sich diese konstante Bewegung (1.) der gesuchten (zu Ende der Zeit $t = \tau$ in dem nächst folgenden, im Moment des Verschwindens befindlichen, Zeittheilchen) mit der wahren veränderlichen Bewegung zusammenfallenden konstanten Bewegung, so daß also an der Grenze des Werthes von Δt d. h. für $\Delta t = 0$,

$$v' = \frac{ds}{dt} \quad \text{oder} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

Und auf diese Begriffe gestützt, mögen nun folgende Aufgaben stehen.

58.

Ist nämlich jeder Punkt Q der Linie AB (Fig. 23.), dessen Abscisse $AQ = x$ ist, von einer parallelen Kraft ψ_x angegriffen, und soll man die Summe aller dieser Kräfte von A bis B, d. h. das obige P_0 finden, so verfährt man so:

Diese gesuchte Summe aller der Kräfte ψ_x, die auf die einzelnen Punkte von A bis Q wirken, ist offenbar selbst eine Funktion von x, welche durch S_x bezeichnet seyn mag. Denkt man sich nun x um $\Delta x = QR$ vermehrt, so vermehrt sich S_x um ΔS d. h. um $\partial S_x \cdot \Delta x + \partial^2 S_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 S_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$, welches ΔS also die Summe aller Kräfte ist, welche auf die Punkte von Q bis R wirken. Nimmt man nun Δx nicht größer, als daß ψ_x von ψ_x an bis zu $\psi_{x+\Delta x}$ hin immerfort wächst oder immerfort abnimmt, so daß ψ_x und $\psi_{x+\Delta x}$ (die Kräfte, welche auf die Punkte Q und R wirken,) die größten und kleinsten Kräfte sind, unter allen, welche auf die zwischen Q und R liegenden Punkte wirken, so ist klar, daß die Produkte $\psi_x \cdot \Delta x$ und $\psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$ (welche die Summe aller der zwischen Q und R wirkenden Kräfte vorstellen, wenn auf alle Punkte dieser Entfernung $QR = \Delta x$, immerfort die kleinste oder immerfort die größte der wirklich vorhandenen Kräfte einwirkte) Grenzen sind, also Grenzreihen



$$\psi_x \cdot \Delta x$$

und

$$\psi_x \cdot \Delta x + \partial\psi_x \cdot \Delta x^2 + \cdots$$

zwi[illegible] das obige

$$[illegible] S_x \cdot \Delta x + \partial^2 S_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots$$

[illegible] aß n[illegible] 36.) nothwendig

[illegible] $\psi_x \cdot dx$ seyn muß,

[illegible] gende Integral geschrieben

[illegible] Voraussetzungen entspricht.

Dritte Abtheilung.

Einige der einfachern Anwendungen der Differenzial-Rechnung auf Statik und Mechanik.

57.

In der Statik wird gezeigt, daß wenn beliebig viele unter sich feste Punkte $A_1, A_2, A_3, A_4 \cdots A_n$ (deren Koordinaten-Werthe beziehlich x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 und ꝛc. ꝛc., zuletzt x_n, y_n, z_n sind), beziehlich von den parallelen Kräften P_1, $P_2, P_3, \cdots P_n$ angegriffen werden, dafür eine einzige Kraft P_0 gesetzt werden kann, der Summe aller Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_n$ gleich, und einen Punkt A_0 angreifend, dessen Koordinaten-Werthe x_0, y_0, z_0 durch die Gleichungen

$$1)\ P_0 \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + P_3 \cdot x_3 + \cdots + P_n \cdot x_n,$$

$$2)\ P_0 \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + P_3 \cdot y_3 + \cdots + P_n \cdot y_n,$$

$$3)\ P_0 \cdot z_0 = P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + P_3 \cdot z_3 + \cdots + P_n \cdot z_n$$

gegeben sind, während

$$3)\ P_0 = P_1 + P_2 + P_3 + \cdots + P_n \text{ ist.}$$

Dieser Punkt A_0 (x_0, y_0, z_0) heißt der Mittelpunkt der parallelen Kräfte (auch der Schwerpunkt, so oft man sich unter den Kräften Schwerkräfte denkt, die auf alle stetig neben einander liegenden einzelnen Punkte gleich stark wirken).

Liegen alle Angriffspunkte $A_1, A_2, \cdots A_n$ in einer und derselben Ebene, so kann man diese als Axen-Ebene (der x und y) nehmen, und da dann $z_1, z_2, \cdots z_n$ alle $= 0$ sind, so ist auch $z_0 = 0$; d. h. der Schwerpunkt liegt dann in derselben Ebene, und wird bloß aus den Gleichungen (1. u. 2.) bestimmt.

Liegen alle Angriffspunkte $A_1, A_2, \cdots A_n$ in einer und derselben geraden Linie, und nimmt man diese zur Axe der x, so sind auch noch alle die $y_1, y_2, \cdots y_n = 0$, demnach auch $y_0 = 0$, d. h. der Schwerpunkt liegt dann auch in derselben geraden Linie, und wird bloß durch die Gleichung (1.) bestimmt.

Und auf diese Begriffe gestützt, mögen nun folgende Aufgaben stehen.

58.

Ist nämlich jeder Punkt Q der Linie AB (Fig. 23.), dessen Abscisse $AQ = x$ ist, von einer parallelen Kraft ψ_x angegriffen, und soll man die Summe aller dieser Kräfte von A bis B, d. h. das obige P_0 finden, so verfährt man so:

Diese gesuchte Summe aller der Kräfte ψ_x, die auf die einzelnen Punkte von A bis Q wirken, ist offenbar selbst eine Funktion von x, welche durch S_x bezeichnet seyn mag. Denkt man sich nun x um $\Delta x = QR$ vermehrt, so vermehrt sich S_x um ΔS d. h. um $\partial S_x \cdot \Delta x + \partial^2 S_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 S_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$, welches ΔS also die Summe aller Kräfte ist, welche auf die Punkte von Q bis R wirken. Nimmt man nun Δx nicht größer, als daß ψ_x von ψ_x an bis zu $\psi_{x+\Delta x}$ hin immerfort wächst oder immerfort abnimmt, so daß ψ_x und $\psi_{x+\Delta x}$ (die Kräfte, welche auf die Punkte Q und R wirken,) die größten und kleinsten Kräfte sind, unter allen, welche auf die zwischen Q und R liegenden Punkte wirken, so ist klar, daß die Produkte $\psi_x \cdot \Delta x$ und $\psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$ (welche die Summe aller der zwischen Q und R wirkenden Kräfte vorstellen, wenn auf alle Punkte dieser Entfernung $QR = \Delta x$, immerfort die kleinste oder immerfort die größte der wirklich vorhandenen Kräfte einwirkte) Grenzen sind, also Grenzreihen

$$\psi_x \cdot \Delta x$$

und

$$\psi_x \cdot \Delta x + \partial \psi_x \cdot \Delta x^2 + \cdots,$$

bilden, zwischen denen das obige

$$\Delta S \quad \text{oder} \quad \partial S_x \cdot \Delta x + \partial^2 S_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \cdots$$

immer liegen muß, so daß nach (N. 36.) nothwendig

$$\partial S_x = \psi_x \quad \text{also} \quad S_x = \int_{x+a} \psi_x \cdot dx$$ seyn muß,

wo wir sogleich das mit $x = 0$ anfangende Integral geschrieben haben, weil solches hier den übrigen Voraussetzungen entspricht.

Wird dann AB = b gesetzt, so ist die Summe aller wirkenden Kräfte von A bis B offenbar $= \int_{b \div 0} \psi_x \cdot dx$.

Anmerkung 1. Die Differenzial-Rechnung des Leibnitz würde dasselbe auf nachstehendem Wege erzielen. Sie würde sich ein Element der Linie AB denken $= dx$, und die auf dasselbe wirkende Kraft $= \psi_x \cdot dx$ setzen, indem sie die Kraft ψ_x auf jeden Punkt dieses (im Moment des Verschwindens befindlichen) Elementes dx als ein und dieselbe bleibend sich denkt. Diese auf das Element dx wirkende Kraft $\psi_x \cdot dx$ ist aber der Zuwachs dS_x der Summe aller Kräfte, während x um dx wächst; also hat man

$$dS_x = \psi_x \cdot dx \quad \text{oder} \quad S_x = \int \psi_x \cdot dx. \text{ *)}$$

Anmerkung 2. Die „Methode der Grenzen" würde wiederum zeigen, daß ΔS allemal zwischen $\psi_x \cdot \Delta x$ und $\psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$ liegen müsse, daß also auch

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \text{ zwischen } \psi_x \text{ und } \psi_{x+\Delta x}$$

liege; daß folglich, weil für $\Delta x = 0$ diese beiden Grenzen selbst in ψ_x zusammenfallen, auch dann $\frac{\Delta S}{\Delta x}$, d. h. jetzt $\frac{dS}{dx}$ mit ψ_x zusammenfallen müsse; nach (N. 36. Anmerkung).

Die Methode der Grenzen würde also hier, dem Wesen nach, wiederum mit dem Verfahren der Ableitungsrechnung zusammenfallen, und sich nur die Entwicklung von ΔS und $\psi_{x+\Delta x}$ in, nach Potenzen von Δx fortlaufende Reihen ersparen.

---

*) Statt dieser Entwicklung kann die Differenzial-Rechnung den Satz ein für allemal entwickelt sich denken, welcher (§. 161. u. §. 161. b.) zu finden ist, daß nämlich $\int_{b \div a} \psi_x \cdot dx$ die Summe aller der Produkte

$$\psi_a \cdot h + \psi_{a+h} \cdot h + \psi_{a+2h} \cdot h + \cdots + \psi_{a+(n-1)h} \cdot h$$

vorstelle, wenn $h = \frac{b-a}{n}$ und n unendlich groß gedacht wird. Dann braucht sie hier nur die Voraussetzung zu Hilfe zu nehmen, daß die Kräfte ψ_a, ψ_{a+h}, ψ_{a+2h}, 2c. 2c. ein Element h (oder dx) hindurch konstant dieselben bleiben, also nur von Element zu Element sich ändern.

59.

Würde nun unter derselben Voraussetzung, wie (N. 58.), die Summe aller der Produkte $x \cdot \psi_x$ gesucht, nämlich das Produkt $P_0 \cdot x_0$ der (N. 57. 1.), so würde man die Summe aller dieser Produkte, in Bezug auf alle zwischen A und Q liegende Angriffspunkte, als eine Funktion von x ansehen müssen und etwa durch

$$M_x$$

bezeichnen können. Wird dann x um $\Delta x = QR$ vermehrt, so vermehrt sich M_x um ΔM d. h. um

$$\partial M_x \cdot \Delta x + \partial^2 M_x \cdot \frac{\Delta x^2}{2!} + \partial^3 M_x \cdot \frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots.$$

Ist nun ψ_x die kleinste und $\psi_{x+\Delta x}$ die größte unter allen den auf die Punkte zwischen Q und R wirkenden Kräften, so sind offenbar

$$x \cdot \psi_x \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad (x+\Delta x) \cdot \psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$$

zwei Grenzen zwischen denen der Zuwachs ΔM liegen muß, und welche in Reihen nach Δx entwickelt mit demselben ersten Gliede $x \cdot \psi_x \cdot \Delta x$ anfangen, so daß man der (N. 36.) zufolge

$$\partial M_x = x \cdot \psi_x \quad \text{oder} \quad M_x = \int x \cdot \psi_x \cdot dx$$

hat, oder

$$M_b = \int_{b \div 0} x \cdot \psi_x \cdot dx,$$

wenn man die Summe aller der über die ganze Linie AB sich erstreckenden Produkte haben will.

Wäre aber ψ_x die größte und $\psi_{x+\Delta x}$ die kleinste unter allen den zwischen Q und R wirkenden Kräften, so wären

$$x \cdot \psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad (x+\Delta x) \cdot \psi_x \cdot \Delta x$$

die beiden Grenzen, zwischen denen ΔM liegen müßte; und der Erfolg wäre dann genau derselbe. — Und jedesmal braucht man sich Δx nicht größer zu denken, als daß eine dieser Voraussetzungen erfüllt ist.

Und dann bestimmt sich die Lage des Schwerpunktes, nach (N. 57. 1.), nämlich

$$x_0 = \frac{\int_{b \div 0} x \cdot \psi_x \cdot dx}{\int_{b \div 0} \psi_x \cdot dx}.$$

Wird z. B. vorausgesetzt, daß die auf die einzelnen Punkte der geraden Linie AB wirkenden parallelen Kräfte sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der Entfernungen dieser Angriffspunkte von C; — wäre also $\psi_x = m \cdot \frac{1}{(c-x)^2}$, während $AC = c$ gesetzt seyn mag, so hätte man

$$\int \psi_x \cdot dx = m \int \frac{dx}{(c-x)^2} = m \cdot \frac{1}{c-x},$$

also $$\int_{b \div 0} \psi_x \cdot dx = m\left(\frac{1}{c-b} - \frac{1}{c}\right) = \frac{mb}{c(c-b)}.$$

Ferner wäre

$$\int x \cdot \psi_x \cdot dx = m \int \frac{x}{(c-x)^2} \cdot dx = m \cdot \left(log(c-x) + \frac{c}{c-x}\right);$$

also $$\int_{b \div 0} x \cdot \psi_x \cdot dx = m\left[\frac{b}{c-b} + log\left(1 - \frac{b}{c}\right)\right].$$

Folglich ist die Abscisse des Schwerpunktes

$$x_0 = c + \frac{c(c-b)}{b} \cdot log\left(1 - \frac{b}{c}\right) = c - \frac{c(c-b)}{b} \cdot log \frac{c}{c-b},$$

wo $b = AB$, $c = AC$, also $c - b = BC$ ist.

Anmerkung 1. Die Differenzial-Rechnung des Leibnitz würde die Summe aller der Produkte $x \cdot \psi_x$ dadurch finden, daß sie sich die auf das Element $QR = dx$ wirkende Kraft $\psi_x \cdot dx$ in der Mitte dieses Elementes konzentrirt dächte, und mit der Abscisse $x + \frac{1}{2}dx$ dieses Angriffspunktes, d. h. (im Sinne der Differenzial-Rechnung das unendlich kleine $\frac{1}{2}dx$ gegen das endliche x außer Acht lassend) mit x multiplizirte, und nun die Summe dieser Produkte $x \cdot \psi_x \cdot dx$ für alle die zwischen A und B liegenden Elemente, dem (§. 161.) zufolge, ohne weiteres durch $\int_{b+0} x \cdot \psi_x \cdot dx$ ausdrückte.

Anmerkung 2. Die Methode der Grenzen dagegen würde wieder die zwei Grenzen

$$x \cdot \psi_x \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad (x + \Delta x) \cdot \psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x$$

oder $$x \cdot \psi_{x+\Delta x} \cdot \Delta x \quad \text{und} \quad (x + \Delta x) \cdot \psi_x \cdot \Delta x$$

bestimmen, zwischen denen ΔM liegen muß, und hätte dann

$\frac{\Delta M}{\Delta x}$ entweder zwischen den Grenzen $x \cdot \psi_x$ und $(x+\Delta x) \cdot \psi_{x+\Delta x}$, oder zwischen $x \cdot \psi_{x+\Delta x}$ und $(x+\Delta x) \cdot \psi_x$, während für $\Delta x = 0$ diese Grenzen allemal in $x \cdot \psi_x$ zusammenfallen, so daß auch $\frac{\Delta M}{\Delta x}$ für $\Delta x = 0$, d. h. $\frac{dM}{dx}$ mit derselben Grenze $x \cdot \psi_x$ zusammenfallen muß (nach N. 36. Anmerkung), also daß man wiederum hat

$$\frac{dM}{dx} = x \cdot \psi_x \quad \text{oder} \quad dM = x \cdot \psi_x \cdot dx.$$

60.

Wirkte auf jeden Punkt der Fläche ABD, dessen Koordinaten x und y sind, die Kraft $\psi_{x,y}$, während die Kurve AND selbst durch die Gleichung

$$y' = \varphi_x$$

gegeben seyn mag, so wäre die Summe aller dieser Kräfte, wie sie auf die gerade Linie QN wirken, offenbar $= \int_{y' \div 0} \psi \cdot dy$, nach (N. 58.); wo $y' = \varphi_x$ ist, so daß dieses Integral eine Funktion von x wird, welche durch f_x bezeichnet seyn kann.

Und dann kann man gerade auf denselben Wegen der (N. 58.) wiederum nachweisen, daß die Summe aller der, auf alle die Linien QN von A bis BD wirkenden Kräfte,

$$P_0, = \int_{b \div 0} f_x \cdot dx \qquad \text{ist,}$$

so daß man solche auch so schreiben kann, nämlich

$$P_0 = \int_{b \div 0} \left(\int_{y' \div 0} \psi \cdot dy\right) \cdot dx,$$

während sie häufig bloß so geschrieben wird

$$P_0 = \int\int \psi \cdot dy \cdot dx.$$

Gerade so findet sich die Summe aller Produkte $x \cdot \psi_{x,y}$

$$= \int_{b \div 0} \left(\int_{y' \div 0} x \cdot \psi \cdot dy\right) \cdot dx;$$

so wie die Summe aller Produkte $y \cdot \psi_{x,y}$

$$= \int_{b \div 0} \left(\int_{y' \div 0} y \cdot \psi \cdot dy\right) \cdot dx;$$

woraus dann die Lage des Schwerpunktes, nämlich x_0 und y_0, nach (N. 57. 1. 2.) sogleich und unmittelbar sich ergibt.

Und leicht ist es nun, diese Resultate auf einen Körper auszudehnen, dessen Oberfläche durch die Gleichung

$$z' = \varphi_{x,y}$$

gegeben ist, und auf dessen einzelne, durch x, y, z gegebene, Punkte eine Kraft $\psi_{x,y,z}$ wirkte. Man würde finden

$$x_0 = \frac{\iiint x \cdot \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\iiint \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}, \quad y_0 = \frac{\iiint y \cdot \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\iiint \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx},$$

$$z_0 = \frac{\iiint z \cdot \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx}{\iiint \psi \cdot dz \cdot dy \cdot dx};$$

wenn nur das erste Integral nach z zwischen den Grenzen genommen wird, innerhalb welcher in der Linie z die Kräfte wirksam gedacht werden; daß zweite Integral nach y dagegen zwischen denjenigen Grenzen der Linie y genommen wird, so wie das dritte Integral nach x zwischen denjenigen Grenzen der Linie x, zwischen denen die Kräfte vorhanden und wirkend gedacht sind.

Soll sich z. B. die Auffindung des Schwerpunktes auf den ganzen Körper erstrecken, der von den 3 Koordinaten-Ebenen und von der krummen Fläche $z' = \varphi_{x,y}$ begrenzt wird, so wird das Integral nach z zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = \varphi_{x,y}$ genommen; dann das Integral nach y, zwischen den Grenzen $y = 0$ und $y = y'$, wenn y' derjenige Werth von y ist, welcher aus $z' = \varphi_{x,y}$, für y sich ergibt, wenn $z' = 0$ wird. Das Integral nach x endlich muß dann zwischen $x = 0$ und demjenigen Werth von x genommen werden, welcher aus $z' = \varphi_{x,y}$ hervorgeht, wenn nicht bloß $z' = 0$, sondern auch noch $y = 0$ gesetzt wird. (Vgl. N. 54.)

61.

Die Bewegung eines Punktes in irgend einer gegebenen Bahn ist bekannt, wenn man zwischen der Zahl t der Sekunden, die während des Anfanges der Bewegung verflossen sind, und der Zahl s der Fuße, welche die Bewegung in dieser Zeit durchlaufen

hat (d. h. allgemeiner gesprochen, zwischen der Zeit t und dem durchlaufenen Raum s), eine Gleichung hat, so daß aus ihr

$$s = {}_t$$

gefunden werden kann, unter s_t eine Zusammensetzung aus t verstanden.

Ist diese Gleichung von der einfachsten Form

$$s = c \cdot t,$$

so ist auch noch für eine andere Zeit t', wenn s' den zugehörigen Raum vorstellt,

$$s' = c \cdot t',$$

also auch $$s : s' = t : t'$$

d. h. die Räume dieser Bewegung verhalten sich dann, wie die zugehörigen Zeiten. — In derselben Bewegung finden sich für

$$t = 1, \qquad n-1, \qquad n,$$
$$s = c, \qquad c(n-1), \qquad cn;$$

folglich der in der nten Sekunde beschriebene Raum

$$= cn - c(n-1) = c,$$

d. h. diese Bewegung beschreibt in jeder nten Sekunde dieselbe Zahl c der Fuße, wie in der ersten. — Diese Bewegung selbst wird daher eine konstante genannt, und c oder $\frac{s}{t}$ heißt dabei die Geschwindigkeit dieser konstanten Bewegung.

62.

So wie dagegen die Gleichung

$$s = s_t$$

nicht zu der so eben betrachteten einfachsten Form gehört, so heißt die Bewegung selbst, welche durch dieses Gesetz bestimmt ist, eine veränderliche Bewegung.

Wird in einer solchen veränderlichen Bewegung

$$s = s_t$$

die Zeit t um Δt vermehrt gedacht, so vermehrt sich der Raum um Δs d. h. um

$$\partial s_t \cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \partial^3 s_t \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots\cdot.$$

Denkt man sich daher $t = n - 1$, und $\Delta t = 1$, so drückt der dazugehörige Werth von Δs, nämlich

$$(\partial s_t)_{n-1} + (\partial^2 s_t)_{n-1} \cdot \frac{1}{2!} + (\partial^3 s_t)_{n-1} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots\cdot$$

den in der $n$ten Sekunde beschriebenen Raum aus, welcher offenbar von der Zahl n selbst abhängig bleibt (so lange nicht $\partial s_t = 0$ und $\partial^2 s_t = \partial^3 s_t =$ 2c. $= 0$ wird, d. h. so lange nicht der Fall der vorhergehenden Nummer eintritt, also so lange die Bewegung veränderlich genannt wird), also in jeder andern Sekunde im Allgemeinen auch ein anderer seyn wird.

63.

Man kann sich nun zuerst folgende Aufgabe stellen. Es drückt $s = s_t$ das Gesetz einer veränderlichen Bewegung aus; man soll die konstante Bewegung finden

$$s_1 = v \cdot t_1,$$

wo v von t_1 unabhängig gedacht und gesucht wird, welche zu einer gegebenen Zeit τ, d. h. für einen bestimmten Werth von $t_1 = \tau$, unter allen konstanten Bewegungen dieser veränderlichen Bewegung am nächsten kommt.

Es ist aber, wenn t um Δt vermehrt gedacht wird, der, vom Ende der Zeit t ab, in der Zeit Δt bei der veränderlichen Bewegung $s = s_t$ beschriebene Raum

$$1)\ \Delta s = \partial s_t \cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \partial^3 s_t \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + \cdots\cdot.$$

Wenn nun der von der konstanten Bewegung

$$s_1 = v \cdot t_1$$

in der Zeit Δt beschriebene Raum durch Δs_1 bezeichnet wird, so hat man

$$2)\ \Delta s_1 = v \cdot \Delta t,$$

und die Differenz der Räume ist daher

$$3) \quad \Delta s - \Delta s_t = (\partial s_t - v) \cdot \Delta t + \partial^2 s_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots .$$

Soll nun dieser Unterschied der von beiden Bewegungen in der Zeit Δt, vom Ende der Zeit t ab, beschriebenen Räume, der kleinst möglichste werden, für Δt im Moment des Verschwindens gedacht, so muß man dem v unter allen Werthen denjenigen geben, welcher (für diesen bestimmten Werth τ von t)

$$4) \quad \partial s_t - v = 0, \quad \text{also} \quad v = \partial s_t = \frac{ds}{dt}$$

macht, weil dann in obigem Unterschiede $\Delta s - \Delta s_t$, das mit Δt behaftete Glied herausfällt, folglich gegen den Fall, wo solches nicht herausfällt, im Moment des Verschwindens ist.

Die Geschwindigkeit v dieser konstanten Bewegung

$$s_1 = v \cdot t_1,$$

welche zu der Zeit $t = \tau$ mit der veränderlichen Bewegung

$$s = s_t$$

am nächsten zusammenfällt, und welche

$$v = \partial s_t = \frac{ds}{dt}$$

gefunden worden ist, nennt man die (veränderliche) Geschwindigkeit der veränderlichen Bewegung, so daß, diesem Begriff zu Folge, eine solche veränderliche Bewegung zu jeder andern Zeit auch eine andere Geschwindigkeit hat,

Ist z. B. $s = gt^2 + bt$ das Gesetz einer gegebenen veränderlichen Bewegung, so ist

$$v = \partial s_t = \frac{ds}{dt} = 2gt + b$$

die Geschwindigkeit dieser Bewegung. — Und ist hier $b = 0$, so verhalten sich die zu verschiedenen Zeiten τ und τ' gehörigen Geschwindigkeiten v und v' dieser veränderlichen Bewegung

$$s = gt^2,$$

wie diese Zeiten selber, also daß man hat

$$v : v' = \tau : \tau',$$

wie solches aus den Gleichungen

$$v = 2g\tau \quad \text{und} \quad v' = 2g\tau'$$

augenblicklich hervorgeht.

Anmerkung 1. Die Differenzial-Rechnung des Leibnitz betrachtet jede veränderliche Bewegung, als aus unendlich vielen, eine unendlich kleine Zeit hindurch nur dauernden verschiedenen konstanten Bewegungen gebildet, und hat daher zu Ende irgend einer Zeit $t = \tau$, für die unendlich kleine nächstfolgende Zeit dt, den dazu gehörigen unendlich kleinen Raum ds so, daß, wenn v die Geschwindigkeit dieser jetzigen, dem Zeitpunkt τ entsprechenden konstanten Bewegung ist, die Gleichung

$$ds = v \cdot dt \quad \text{oder} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

statt finden muß, eben weil auch an dieser Stelle die Bewegung als eine konstante Bewegung angesehen wird.

Anmerkung 2. Die Methode der Grenzen, würde sich zuerst die konstante Bewegung

$$1) \quad s_1 = v' \cdot t_1 \qquad \text{denken,}$$

welche so ist, daß der von ihr in der bestimmten Zeit $t_1 = \Delta t$ beschriebene Raum $s' = v' \cdot \Delta t$, genau gleich ist dem Raum Δs, welchen die veränderliche Bewegung in derselben bestimmten und gegebenen Zeit Δt beschreiben wird, also daß $\Delta s = s'$ ist, und demnach die Gleichung (1.) in

$$2) \quad \Delta s = v' \cdot \Delta t \quad \text{oder} \quad v' = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

übergeht. Je kleiner nun Δt gedacht wird, desto mehr nähert sich diese konstante Bewegung (1.) der gesuchten (zu Ende der Zeit $t = \tau$ in dem nächst folgenden, im Moment des Verschwindens befindlichen, Zeittheilchen) mit der wahren veränderlichen Bewegung zusammenfallenden konstanten Bewegung, so daß also an der Grenze des Werthes von Δt d. h. für $\Delta t = 0$,

$$v' = \frac{ds}{dt} \quad \text{oder} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

wird, wenn man den jetzigen Werth der Geschwindigkeit v' lieber durch v bezeichnet. *)

64.

Die Ursache der in jedem Augenblick statt findenden Aenderung der Geschwindigkeit einer veränderlichen Bewegung, wird Kraft genannt (beschleunigende Kraft), uud diese Kraft ist entweder selbst konstant, d. h. zu allen Zeiten dieselbe, oder veränderlich, d. h. von der Zeit t, zu welcher sie hinzutritt, abhängig, also eine Funktion von t.

Wirkt eine konstante Kraft g eine Zeit t hindurch ohne Aufhören, so nimmt man die Geschwindigkeit, die sie hervorbringt, der Zeit t proportional, so daß man diese

$$\text{Geschwindigkeit} = gt$$

setzt.

65.

Ist daher eine veränderliche Bewegung $s = s_t$ dadurch entstanden, daß in jedem Augenblick vom Anfang der Bewegung eine Kraft ψ_t hinzugetreten ist, so ist die Geschwindigkeit

$$v_t = \partial s_t$$

dieser Bewegung offenbar von allen den Werthen von ψ_t abhängig, welche für alle vorhergegangenen Werthe von t statt gefunden haben, aber eben deshalb von der Zusammensetzung ψ_t selber abhängig. — Um nun zu wissen wie? — denke man sich t um Δt wachsend, so wächst v um

$$\Delta v = \partial v_t \cdot \Delta t + \partial^2 v_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \partial^3 v_t \cdot \frac{\Delta t^3}{3!} + \dots .$$

Dieser Zuwachs der Geschwindigkeit ist aber dadurch entstanden, daß in jedem Augenblick zwischen den Zeiten t und $t + \Delta t$,

---

*) Man wird aber zwischen dieser Nummer (63.) und der Legung einer geradlinigen Tangente an eine Kurve, die größte Aehnlichkeit wahrnehmen, welche eben in der gemeinschaftlichen Analysis beider Aufgaben ihren Grund hat.

also während der Zeit Δt (von t ab), die neue Kraft ψ_t hinzugetreten ist, und zwar in jedem Augenblick selber verändert, so daß zu Ende der Zeit Δt die Kraft $\psi_{t+\Delta t}$ es ist, welche auf's neue hinzutritt. (Die ganze Frage denkt man sich auf eine bestimmte Zeit $t = \tau$ bezogen). Ist nun für diesen Werth $t = \tau$, ψ_t die kleinste und $\psi_{t+\Delta t}$ die größte unter den durch ψ_t bezeichneten Kräften, welche während des Zeitraums Δt hinzutreten (d. h. wird Δt nicht größer gedacht, als daß ψ_t von t bis zu $t + \Delta t$ fortwährend wächst), so ist klar, daß der Zuwachs der Geschwindigkeit, der von den immerfort größer werdenden Kräften ψ_t herrührt, größer ist, als wenn die kleinste Kraft ψ_t für $t = \tau$ die ganze Zeit Δt hindurch hinzuträte (wo dann selbiger nach (N. 64.) $= \psi_t \cdot \Delta t$ seyn müßte), aber kleiner ist, als wenn die größte der Kräfte $\psi_{t+\Delta t}$ für $t = \tau$, die ganze Zeit Δt hindurch auf's neue hinzugetreten wäre (wo er dann offenbar $\psi_{t+\Delta t} \cdot \Delta t$ seyn müßte, nach derselben (N. 64.)). Man hat also

$$\psi_t \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad \psi_{t+\Delta t} \cdot \Delta t$$

als zwei Grenzen, von denen die zweite

$$= \psi_t \cdot \Delta t + \partial \psi_t \cdot \Delta t^2 + \partial^2 \psi_t \cdot \frac{\Delta t^3}{2!} + \cdots\cdots$$

ist, und zwischen denen der Zuwachs

$$\Delta v = \partial v_t \cdot \Delta t + \partial^2 v_t \cdot \frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots\cdots$$

liegt, was nach (N. 36.) nicht möglich wäre, wenn nicht

$$\partial v_t = \psi_t \quad \text{oder} \quad \frac{dv}{dt} = \psi_t \quad \text{oder} \quad dv = \psi \cdot dt$$

wäre.

Und wäre $\psi_{t+\Delta t}$ die kleinste, dagegen ψ_t (immer für $t = \tau$) die größte der hinzutretenden Kräfte, d. h. nehmen die neu hinzutretenden Kräfte von $t = \tau$ an, bis $t = \tau + \Delta t$ immerfort ab, so liegt doch Δv noch immer zwischen denselben Grenzen; und alles bleibt dann dasselbe.

Weil nun

$$1)\quad v_t = \partial s_t \quad \text{und} \quad 2)\quad \partial v_t = \psi_t \quad \text{ist,}$$

so ist auch 3) $\partial^2 s_t = \psi_t$ oder $d^2 s = \psi \cdot dt^2$.

Wird z. B. die Gleichung zwischen der Zeit t und dem beschriebenen Raum s gesucht, den ein Punkt von A an nach C hin durchläuft (Fig. 23.), wenn jeden Augenblick eine neue Kraft ihn antreibt, die sich umgekehrt wie das Quadrat seiner jedesmaligen Entfernung von C verhält, d. h. welche $= m \cdot \frac{1}{(e - s_t)^2}$ ist, wenn $AC = e$, AQ aber der Raum s der Bewegung ist, der in der Zeit t vom Anfange A an beschrieben worden ist, so ist dasmal

$$\psi_t = m \cdot \frac{1}{(e - s_t)^2}$$

und die Gleichung zwischen s und t jetzt

$$\partial^2 s_t = m \cdot \frac{1}{(e - s_t)^2},$$

aus welcher nun s_t selbst gefunden werden muß, auf Wegen, welche jedoch erst im nächsten 5ten Theil dieses Systems beschrieben werden, in so ferne dieser 5te Theil sich vorzüglich damit beschäftigen wird, aus Gleichungen zwischen einer noch unbekannten Zusammensetzung s_t und einer oder einiger ihrer Ableitungen, die Zusammensetzung s_t selber zu finden.

Wäre in einer andern Bewegung die, zu Ende einer jeden Zeit hinzutretende Kraft der Quadratwurzel aus der Zeit t proportional, also

$$\psi_t = m \cdot \sqrt{t} = m \cdot t^{\frac{1}{2}},$$

so hätte man

$$1)\quad \partial v_t = \partial^2 s_t = m \cdot t^{\frac{1}{2}},$$

also

$$2)\quad v_t = \partial s_t = \tfrac{2}{3} m \cdot t^{\frac{3}{2}} + c;$$

mithin

$$3)\quad s = \tfrac{4}{15} m \cdot t^{\frac{5}{2}} + ct + c_1,$$

welches die gesuchte Gleichung zwischen s und t ist, in welcher jedoch noch die beiden Konstanten c und c_1 bestimmt werden müssen. Zählen wir aber den Raum s von dem Punkt A an, wo die Bewegung anfängt, und wo $t = 0$ gedacht wird, so hat man $t = 0$ und $s = 0$ zugleich, folglich dann, wenn man diese Werthe in (3.) substituirt,

$c_1 = 0$. — Und wird ferner angenommen, daß in A, wo $t = 0$ gesetzt worden, der bewegte Punkt bereits eine gegebene Geschwindigkeit a hatte, so ist, wo $t = 0$, $v = a$; demnach, wenn man diese Werthe in (2.) substituirt, nothwendig $a = c$ oder $c = a$, so daß dann, nach Bestimmung dieser beiden Konstanten, die Gleichung (3.) in

$$4) \quad s = \tfrac{4}{15} mt^2 \cdot \sqrt{t} + at$$ übergeht,

welche dann zu jeder Zeit t den beschriebenen Raum s liefert, aber auch umgekehrt, zu jedem gegebenen Raum s, die dazu nöthige Zeit t finden läßt.

Anmerkung 1. Die Differenzial-Rechnung des Leibnitz, welche die veränderliche Bewegung als ein Aggregat von verschiedenen konstanten Bewegungen ansieht (Anmerkung 1. zu N. 63.), würde die in der Zeit dt hinzutretende Kraft ψ_t als, während dieser Zeit dt, dieselbe bleibend ansehen, daher nach (N. 64.) einen Zuwachs der Geschwindigkeit

$$dv = \psi \cdot dt$$

erhalten.

Anmerkung 2. Die Methode der Grenzen dagegen würde wiederum nachweisen, daß der Zuwachs Δv der Geschwindigkeit zwischen den Grenzen

$$\psi_t \cdot \Delta t \quad \text{und} \quad \psi_{t+\Delta t} \cdot \Delta t$$

also auch $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ zwischen den Grenzen

$$\psi_t \quad \text{und} \quad \psi_{t+\Delta t}$$

liege, daß diese Grenzen, an der Grenze von Δt, d. h. für $\Delta t = 0$, zusammenfallen, und daß daher auch $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ für $\Delta t = 0$, mit ψ_t zusammenfallen müsse, daß also

$$\frac{dv}{dt} = \psi \quad \text{oder} \quad dv = \psi \cdot dt$$

seyn müsse.

66.

Bewegt sich ein Punkt M in einer krummen Linie AMND (Fig. 22.), so verfolgt man die Bewegung seiner beiden Projek-

tionen M_1 und M_2 in den beiden Axen AX und AY. Kennt man nämlich für jede Zeit t die Werthe von $AM_1 = MM_2 = x_t$ und $AM_2 = MM_1 = y_t$, so daß man die Gleichungen hat

$$x = x_t \quad \text{und} \quad y = y_t,$$

so kennt man nicht bloß die Lage des Punktes M zu jeder Zeit t, sondern man kann auch aus diesen beiden Gleichungen t eliminiren, und so die Gleichung zwischen den Kordinaten x und y, also die Gleichung der Kurve finden.

Um aber die Gesetze der Bewegung der beiden Projektionen M_1 und M_2 in den geraden Bahnen AX und AY zu haben, darf man nur die Kräfte kennen, welche diese Projektionen, zu Ende einer jeden Zeit, treiben. Zu dem Ende zerlegt man die Kraft ψ_t, welche zu Ende jeder Zeit t an den Punkt M in einer gegebenen Richtung hinzutritt, in zwei Kräfte X_t und Y_t, beziehlich mit AX und AY parallel (so nämlich, daß X_t und Y_t zusammen statt ψ_t gesetzt werden können), so hat man die Kraft X_t, welche jeden Augenblick zu der Projektion M_1 hinzutretend gedacht werden kann, und Y_t, welche zur Projektion M_2 hinzutritt. — Man hat also nach (N. 65.) die beiden Gleichungen

$$1)\ \partial^2 x_t = X \quad \text{und} \quad 2)\ \partial^2 y_t = Y$$

oder $$d^2x = X \cdot dt^2 \quad \text{und} \quad d^2y = Y \cdot dt^2,$$

aus welchen nun die Funktionen x_t und y_t selbst entwickelt werden müssen.

Sind nun v′ und v″ die Geschwindigkeiten der beiden Projektionen M_1 und M_2, so hat man noch zu ihrer Bestimmung, der (N. 63.) zufolge,

$$3)\ \partial v_t' = X \quad \text{und} \quad 4)\ \partial v_t'' = Y$$

oder $$5)\ \partial x_t = v' \quad \text{und} \quad 6)\ \partial y_t = v''.$$

Ist aber v die Geschwindigkeit des Punktes M selbst, in seiner Bahn AM = s, so hat man noch nach (N. 63.)

$$7)\ \partial s_t = v,$$

während, weil s der Bogen ist, x und y aber die Koordinaten sind, nach (N. 51.)

$$8)\ \partial s_t = \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$$

oder $$\partial s_t^2 = \partial x_t^2 + \partial y_t^2,$$

also auch $$9)\ v^2 = v'^2 + v''^2$$ ist.

67.

Und bewegte sich ein Punkt M auf einer krummen Linie im Raume, deren Punkte nicht alle in einer und derselben Ebene liegen, so hätte er 3 Projektionen P_1, P_2, P_3 (Fig. 20.) auf 3 Axen AX, AY, AZ; und wird dann die an M jeden Augenblick in einer gegebenen Richtung hinzutretende Kraft ψ_t in 3 Kräfte zerlegt, X_t, Y_t und Z_t, beziehlich mit AX, AY, AZ parallel, so hat man die 3 Gleichungen

$$1)\ \partial^2 x_t = X_t, \quad 2)\ \partial^2 y_t = Y_t, \quad 3)\ \partial^2 z_t = Z_t;$$

aus welchen, durch Integration, x, y, z in t ausgedrückt gefunden werden, etwa

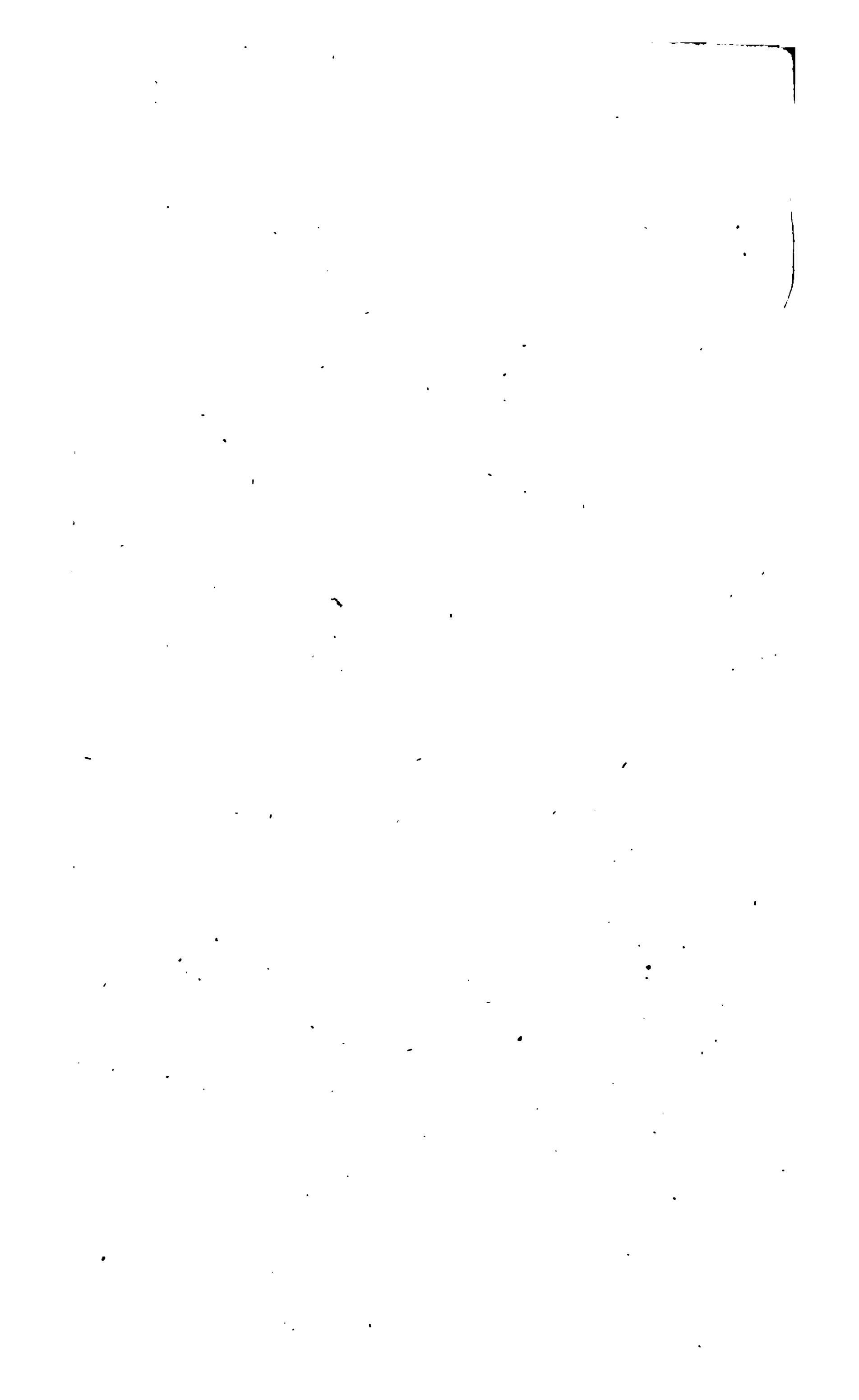
$$x = x_t, \qquad y = y_t \quad \text{und} \quad z = z_t.$$

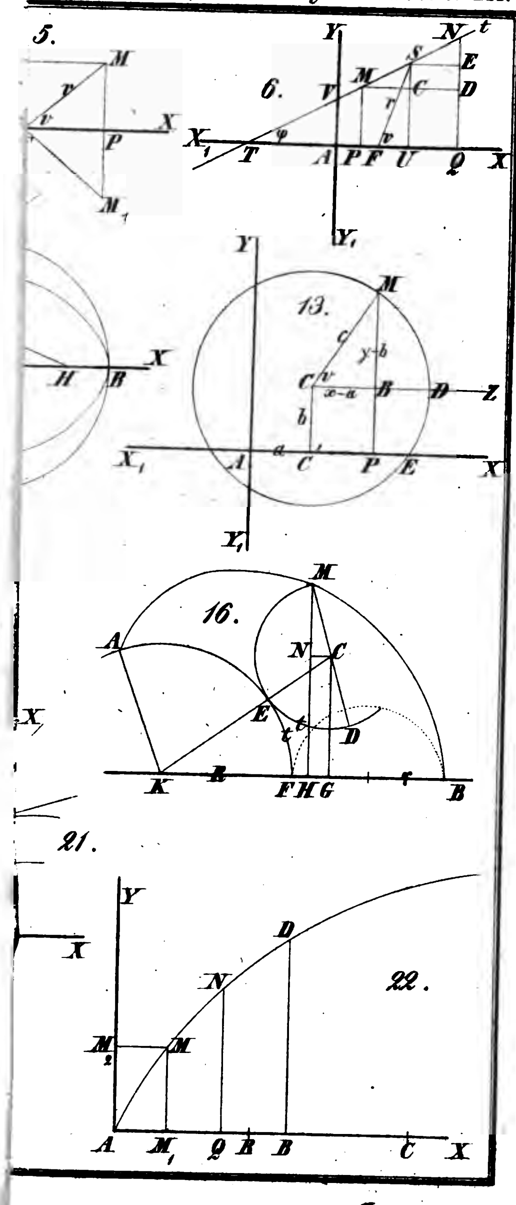
Aus diesen letztern Gleichungen kann dann wiederum t eliminirt werden, so daß man zwei Gleichungen erhält zwischen den Koordinaten x, y, z, d. h. gerade so viele Gleichungen, als nach (N. 28.), zur Bestimmung einer krummen Linie im Raume nöthig sind.

Schluß-Anmerkung.

Diese Beispiele mögen vor der Hand ausreichend nachweisen, wie man sich in vorkommenden Fällen, der Ableitungsrechnung, der Differenzial-Rechnung und der „Methode der Grenzen" bedient, um gewisse Untersuchungen über Raum und Kraft- und Zeit-Größen und über den Zusammenhang derselben, anzustellen. Vielleicht wird es dem Leser, der fast auf jede Aufgabe hier alle 3 Methoden nach einander angewandt sieht, dadurch um so klarer, daß sich keine dieser Ansichten von der andern dem Wesen nach unterscheidet, und daß jeder, welcher irgend eine dieser Ansichten zu vertheidigen Lust hat, ihre Identität mit jeder der beiden andern bald nachweisen kann. Daß wir bisher der Ableitungsrechnung den Vorzug gegeben haben, und in der Folge noch immer den Vorzug geben werden, hat seinen Grund darin, weil

wir diese Form der Rechnung für diejenige halten, welche bei verwikkeltern und zusammengesetztern Untersuchungen die leichteste oder bequemste Uebersicht der Rechnungen möglich macht, dem Anfänger aber die deutlichste ist und die befriedigendste Ueberzeugunb gewährt; endlich aber, weil, und dies ist der bemerkenswertheste Grund, die Form der Anwendungen, welche wir hier der „Methode der Grenzen" als eigenthümlich zugesprochen haben, mit eben so großem Rechte als der Ableitungsrechnung eigenthümlich angesehen werden kann und muß, so oft nämlich (N. 36. Anmerkung) in Anwendung kommt; also mit Ausnahme der Oskulationen. Und daß in der Theorie der Oskulationen die Ableitungsrechnung die bequemste ist, fällt von selbst in die Augen, wenn solches auch nicht schon dadurch bestätigt wäre, daß selbst die Verfechter der andern Ansichten sich häufig in dieser Theorie des Taylor'schen Lehrsatzes bedienen, also denselben Weg der Ableitungsrechnung einschlagen.





5.
6.
13.
16.
21.
22.

$$8)\ \partial s_t = \sqrt{\partial x_t^2 + \partial y_t^2}$$

oder $$\partial s_t^2 = \partial x_t^2 + \partial y_t^2,$$

also auch $$9)\ v^2 = v'^2 + v''^2$$ ist.

67.

Und bewegte sich ein Punkt M auf einer krummen Linie im Raume, deren Punkte nicht alle in einer und derselben Ebene liegen, so hätte er 3 Projektionen P_1, P_2, P_3 (Fig. 20.) auf 3 Axen AX, AY, AZ; und wird dann die an M jeden Augenblick in einer gegebenen Richtung hinzutretende Kraft ψ_t in 3 Kräfte zerlegt, X_t, Y_t und Z_t, beziehlich mit AX, AY, AZ parallel, so hat man die 3 Gleichungen

$$1)\ \partial^2 x_t = X_t, \quad 2)\ \partial^2 y_t = Y_t, \quad 3)\ \partial^2 z_t = Z_t;$$

aus welchen, durch Integration, x, y, z in t ausgedrückt gefunden werden, etwa

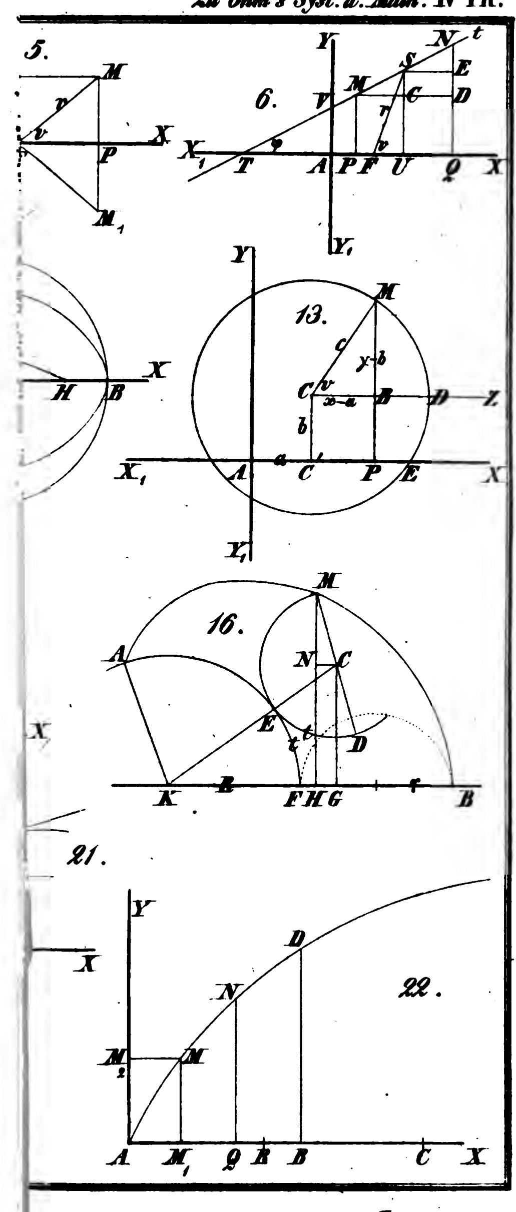
$$x = x_t, \qquad y = y_t \quad \text{und} \quad z = z_t.$$

Aus diesen letztern Gleichungen kann dann wiederum t eliminirt werden, so daß man zwei Gleichungen erhält zwischen den Koordinaten x, y, z, d. h. gerade so viele Gleichungen, als nach (N. 28.), zur Bestimmung einer krummen Linie im Raume nöthig sind.

Schluß-Anmerkung.

Diese Beispiele mögen vor der Hand ausreichend nachweisen, wie man sich in vorkommenden Fällen, der Ableitungsrechnung, der Differenzial-Rechnung und der „Methode der Grenzen" bedient, um gewisse Untersuchungen über Raum und Kraft- und Zeit-Größen und über den Zusammenhang derselben, anzustellen. Vielleicht wird es dem Leser, der fast auf jede Aufgabe hier alle 3 Methoden nach einander angewandt sieht, dadurch um so klarer, daß sich keine dieser Ansichten von der andern dem Wesen nach unterscheidet, und daß jeder, welcher irgend eine dieser Ansichten zu vertheidigen Lust hat, ihre Identität mit jeder der beiden andern bald nachweisen kann. Daß wir bisher der Ableitungsrechnung den Vorzug gegeben haben, und in der Folge noch immer den Vorzug geben werden, hat seinen Grund darin, weil

wir diese Form der Rechnung für diejenige halten, welche bei verwikkeltern und zusammengesetztern Untersuchungen die leichteste oder bequemste Uebersicht der Rechnungen möglich macht, dem Anfänger aber die deutlichste ist und die befriedigendste Ueberzeugund gewährt; endlich aber, weil, und dies ist der bemerkenswertheste Grund, die Form der Anwendungen, welche wir hier der „Methode der Grenzen" als eigenthümlich zugesprochen haben, mit eben so großem Rechte als der Ableitungsrechnung eigenthümlich angesehen werden kann und muß, so oft nämlich (N. 36. Anmerkung) in Anwendung kommt; also mit Ausnahme der Oskulationen. Und daß in der Theorie der Oskulationen die Ableitungsrechnung die bequemste ist, fällt von selbst in die Augen, wenn solches auch nicht schon dadurch bestätigt wäre, daß selbst die Verfechter der andern Ansichten sich häufig in dieser Theorie des Taylor'schen Lehrsatzes bedienen, also denselben Weg der Ableitungsrechnung einschlagen.


5.
6.
13.
16.
21.
22.

Integrale

der

gewöhnlichsten algebraischen und transzendenten

Differenzialien.

In LIV. Tafeln.

Zum vierten Theile von Ohm's System der Mathematik.

Ueber den Gebrauch dieser Tafeln, hinsichtlich der vorkommenden Aggregaten-Ausdrücke, sehe man die dritte Abtheilung des achten Kapitels nach.

Tab. I. $\int \frac{x^m \cdot dx}{P_x}$, { wo P_x ein Produkt von einfachen oder doppelten Faktoren ist. }

$$1)\int \frac{dx}{(x+f)(x+g)} = \frac{1}{g-f} \cdot log \frac{x+f}{x+g}$$

$$2)\int \frac{x \cdot dx}{(x+f)(x+g)} = \frac{1}{(g-f)} \cdot [g \cdot log(x+g) - f \cdot log(x+f)]$$

$$3)\int \frac{dx}{(x+f)(x+g)^2} = \frac{1}{(g-f)(x+g)} + \frac{1}{(g-f)^2} \cdot log \frac{x+f}{x+g}$$

$$4)\int \frac{x \cdot dx}{(x+f)(x+g)^2} = \frac{-g}{(g-f)(x+g)} - \frac{f}{(g-f)^2} \cdot log \frac{x+f}{x+g}$$

$$5)\int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+f)(x+g)^2} = \frac{g^2}{(g-f)(x+g)} + \frac{f^2}{(g-f)^2} \cdot log(x+f) + \frac{g^2 - 2fg}{(g-f)^2} \cdot log(x+g)$$

$$6)\int \frac{dx}{(x+f)^2(x+g)^2} = \frac{-1}{(g-f)^2}\left(\frac{1}{x+f} + \frac{1}{x+g}\right) - \frac{2}{(g-f)^3} \cdot log \frac{x+f}{x+g}$$

$$7)\int \frac{x \cdot dx}{(x+f)^2(x+g)^2} = \frac{1}{(g-f)^2}\left(\frac{f}{x+f} + \frac{g}{x+g}\right) + \frac{f+g}{(g-f)^3} \cdot log \frac{x+f}{x+g}$$

$$8)\int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+f)^2(x+g)^2} = \frac{-1}{(g-f)^2}\left(\frac{f^2}{x+f} + \frac{g^2}{x+g}\right) - \frac{2fg}{(g-f)^3} \cdot log \frac{x+f}{x+g}$$

$$9)\int \frac{x^3 \cdot dx}{(x+f)^2(x+g)^2} = \frac{1}{(g-f)^2}\left(\frac{f^3}{x+f} + \frac{g^3}{x+g}\right) + \frac{f^2(3g-f)}{(g-f)^3} \cdot log(x+f) + \frac{g^2(g-3f)}{(g-f)^3} \cdot log(x+g)$$

$$10)\int \frac{dx}{(x+f)(x+g)(x+h)} = \frac{1}{(g-f)(h-f)} \cdot log(x+f) + \frac{1}{(f-g)(h-g)} \cdot log(x+g) + \frac{1}{(f-h)(g-h)} \cdot log(x+h)$$

$$11)\ \int \frac{x \cdot dx}{(x+f)(x+g)(x+h)} = -\frac{f}{(g-f)(h-f)} \cdot log(x+f) - \frac{g}{(f-g)(h-g)} \cdot log(x+g) - \frac{h}{(f-h)(g-h)} \cdot log(x+h)$$

$$12)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+f)(x+g)(x+h)} = \frac{f^2}{(g-f)(h-f)} \cdot log(x+f) + \frac{g^2}{(f-g)(h-g)} \cdot log(x+g) + \frac{h^2}{(f-h)(g-h)} \cdot log(x+h)$$

$$13)\ \int \frac{dx}{(x+f)(x^2+a)} = \frac{1}{f^2+a} \cdot \left[log \frac{x+f}{\sqrt{(x^2+a)}} + f \cdot \int \frac{dx}{x^2+a} \right]$$

$$14)\ \int \frac{x \cdot dx}{(x+f)(x^2+a)} = \frac{1}{f^2+a} \cdot \left[f \cdot log \frac{\sqrt{(x^2+a)}}{x+f} + a \cdot \int \frac{dx}{x^2+a} \right]$$

$$15)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+f)(x^2+a)} = \frac{1}{f^2+a} \cdot [f^2 \cdot log(x+f) + \tfrac{1}{2}a \cdot log(x^2+a)] - \frac{af}{f^2+a} \cdot \int \frac{dx}{x^2+a}$$

$$16)\ \int \frac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\int \frac{dx}{x^2+a} - \int \frac{dx}{x^2+b} \right]$$

$$17)\ \int \frac{x \cdot dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{2(b-a)} \cdot log \frac{x^2+a}{x^2+b}$$

$$18)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \left[a \cdot \int \frac{dx}{x^2+a} - b \cdot \int \frac{dx}{x^2+b} \right]$$

$$19)\ \int \frac{dx}{(x+f)^2 (x^2+a)} = \frac{1}{(f^2+a)^2} \cdot \left[f \cdot log \frac{(x+f)^2}{x^2+a} + (f^2-a) \cdot \int \frac{dx}{x^2+a} \right] - \frac{1}{(f^2+a)(x+f)}$$

$$20)\ \int \frac{x \cdot dx}{(x+f)^2 (x^2+a)} = \frac{1}{(f^2+a)^2} \cdot \left[\frac{a-f^2}{2} \cdot log \frac{(x+f)^2}{x^2+a} + 2af \cdot \int \frac{dx}{x^2+a}\right] + \frac{f}{(f^2+a)(x+f)}$$

$$21)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+f)^2 (x^2+a)} = \frac{1}{(f^2+a)^2} \cdot \left[-af \cdot log \frac{(x+f)^2}{x^2+a} - a(f^2-a) \cdot \int \frac{dx}{x^2+a}\right] - \frac{f^2}{(f^2+a)(x+f)}$$

$$22)\ \int \frac{x^3 \cdot dx}{(x+f)^2 (x^2+a)} = \frac{f^2(f^2+3a)}{(f^2+a)^2} \cdot log(x+f) - \frac{a(f^2-a)}{2(f^2+a)^2} \cdot log(x^2+a) - \frac{2a^2 f}{(f^2+a)^2} \cdot \int \frac{dx}{x^2+a} + \frac{f^3}{(f^2+a)(x+f)}$$

$$23)\ \int \frac{dx}{(x+f)(x^2+ax+b)} = \frac{1}{f^2-af+b} \cdot \left[\tfrac{1}{2} \cdot log \frac{(x+f)^2}{x^2+ax+b} + (f-\tfrac{1}{2}a) \cdot \int \frac{dx}{x^2+ax+b}\right]$$

$$24)\ \int \frac{x \cdot dx}{(x+f)(x^2+ax+b)} = \frac{1}{f^2-af+b} \cdot \left[-\tfrac{1}{2}f \cdot log \frac{(x+f)^2}{x^2+ax+b} + (b-\tfrac{1}{2}af) \cdot \int \frac{dx}{x^2+ax+b}\right]$$

$$25)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(x+f)(x^2+ax+b)} = \frac{1}{f^2-af+b} \cdot \left[f^2 \cdot log(x+f) + \tfrac{1}{2}(b-af) \cdot log(x^2+ax+b) + \tfrac{1}{2}(a^2 f-ab-2bf) \cdot \int \frac{dx}{x^2+ax+b}\right]$$

Tab. IV. Reduktionsformeln für $\int x^{m-1}\cdot(a+bx^n)^p\cdot dx$.

I $\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$

$$= (a+bx^n)^{p+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\frac{(m-n)^{\mathfrak{a}|-n}\cdot a^{\mathfrak{a}}}{(m+np)^{\mathfrak{a}+1|-n}\cdot b^{\mathfrak{a}+1}}\cdot x^{m-(\mathfrak{a}+1)n}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$

$$+(-1)^{\mu}\frac{(m-n)^{\mu|-n}\cdot a^{\mu}}{(m+np)^{\mu|-n}\cdot b^{\mu}}\cdot\int x^{m-\mu n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$$

II. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = x^m\cdot S\left[\frac{p^{\mathfrak{a}|-1}n^{\mathfrak{a}}a^{\mathfrak{a}}}{(m+np)^{\mathfrak{a}+1|-n}}(a+bx^n)^{p-\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$

$$+\frac{p^{\mu|-1}n^{\mu}a^{\mu}}{(m+np)^{\mu|-n}}\cdot\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p-\mu}\cdot dx$$

III. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = (a+bx^n)^{p+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\frac{(m+n+np)^{\mathfrak{a}|n}b^{\mathfrak{a}}}{m^{\mathfrak{a}+1|n}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}}x^{m+\mathfrak{a}n}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$

$$+(-1)^{\mu}\frac{(m+n+np)^{\mu|n}\cdot b^{\mu}}{m^{\mu|n}\cdot a^{\mu}}\cdot\int x^{m+\mu n-1}(a+bx^n)^p\cdot dx$$

IV. $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\cdot dx = -x^m\cdot S\left[\frac{(m+n+np)^{\mathfrak{a}|n}}{(np+n)^{\mathfrak{a}+1|n}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}}(a+bx^n)^{p+\mathfrak{a}+1}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$

$$+\frac{(m+n+np)^{\mu|n}}{(np+n)^{\mu|n}\cdot a^{\mu}}\cdot\int x^{m-1}(a+bx^n)^{p+\mu}\cdot dx$$

wo m und n positiv oder negativ ganz, p aber ganz oder gebrochen.

Die Fortsetzung dieser Tafel IV. findet sich auf der nächsten Seite.

Tab. IV. b. $\int \frac{x^m}{a+bx^n} \cdot dx.$

---

a) Wenn n eine ungerade Zahl und $\sqrt[n]{a:b} = k$ ist:

$$1) \int \frac{x^m \cdot dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nb(-k)^{n-m-1}} \cdot \log(x+k) + $$

$$+ \frac{1}{nbk^{n-m-1}} \cdot S \left\{ \begin{array}{l} Cos\,(n-m-1)\frac{2\alpha+1}{n}\pi \cdot \log\left(x^2 - 2kx \cdot Cos\,\frac{2\alpha+1}{n}\pi + k^2\right) \\ + 2 Sin\,(n-m-1)\frac{2\alpha+1}{n}\pi \cdot \frac{1}{Tg}\,\frac{x \cdot Sin\,\frac{2\alpha+1}{n}\pi}{k - x \cdot Cos\,\frac{2\alpha+1}{n}\pi} \end{array} \right\}$$

$$2\alpha+\beta = n-3$$

b) Wenn n eine gerade Zahl, a:b negativ und $\sqrt[n]{-a:b} = k$ ist:

$$2) \int \frac{x^m \cdot dx}{a+bx^n} = \frac{1}{nbk^{n-m-1}} \cdot \log(x-k) + \frac{1}{nb(-k)^{n-m-1}} \cdot \log(x+k) + $$

$$+ \frac{1}{nbk^{n-m-1}} \cdot S \left\{ \begin{array}{l} Cos\,(n-m-1)\frac{2(\alpha+1)}{n}\pi \cdot \log\left(x^2 - 2kx \cdot Cos\,\frac{2(\alpha+1)}{n}\pi + k^2\right) \\ + 2 Sin\,(n-m-1)\frac{2(\alpha+1)}{n}\pi \cdot \frac{1}{Tg}\,\frac{x \cdot Sin\,\frac{2(\alpha+1)}{n}\pi}{k - x \cdot Cos\,\frac{2(\alpha+1)}{n}\pi} \end{array} \right\}$$

$$\alpha+\beta = \tfrac{1}{2}n-2$$

c) Wenn n eine gerade Zahl, a:b positiv und $\sqrt[n]{a:b} = k$ ist:

$$3) \int \frac{x^m \cdot dx}{a+bx^n} =$$

$$= \frac{1}{nbk^{n-m-1}} \cdot S \left\{ \begin{array}{l} Cos\,(n-m-1)\frac{2\alpha+1}{n}\pi \cdot \log\left(x^2 - 2kx \cdot Cos\,\frac{2\alpha+1}{n}\pi + k^2\right) \\ + 2 Sin\,(n-m-1)\frac{2\alpha+1}{n}\pi \cdot \frac{1}{Tg}\,\frac{x \cdot Sin\,\frac{2\alpha+1}{n}\pi}{k - x \cdot Cos\,\frac{2\alpha+1}{n}\pi} \end{array} \right\}$$

$$\alpha+\beta = \tfrac{1}{2}n-1$$

In (1.—3.) ist aber $m < n$ vorausgesetzt, so wie m und n positiv ganz.

1) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx = a^p \cdot x^{m+1} \cdot S\left[\frac{p_\alpha}{m+\alpha n+1} \cdot \frac{b^\alpha}{a^\alpha} \cdot x^{\alpha n}\right]$

2) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx = b^p \cdot x^{m+np+1} \cdot S\left[\frac{p_\alpha}{m+(p-\alpha)n+1} \cdot \frac{a^\alpha}{b^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\alpha n}}\right]$

3) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1} \cdot S\left[(-1)^\alpha \cdot \frac{(m-n+1)^{\alpha|-n} \cdot a^\alpha}{(m+np+1)^{\alpha+1|-n} \cdot b^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{x^{(\alpha+1)n}}\right]$$

4) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1} \cdot S\left[(-1)^\alpha \cdot \frac{(m+n+np+1)^{\alpha|n} \cdot b^\alpha}{(m+1)^{\alpha+1|n} \cdot a^{\alpha+1}} \cdot x^{\alpha n}\right]$$

5) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= -x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1} \cdot S\left[\frac{(m+n+np+1)^{\alpha|n}}{(p+1)^{\alpha+1|1} \cdot a^{\alpha+1} \cdot n^{\alpha+1}} \cdot (a+bx^n)^\alpha\right]$$

6) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot S\left[\frac{p^{\alpha|-1} \cdot n^\alpha \cdot a^\alpha}{(m+np+1)^{\alpha+1|-n} \cdot (a+bx^n)^\alpha}\right]$$

7) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx$

$$= x^{m+1} \cdot (a+bx^n)^p \cdot S\left[(-1)^\alpha \cdot \frac{p^{\alpha|-1} \cdot n^\alpha \cdot b^\alpha}{(m+1)^{\alpha+1|n}} \cdot \left(\frac{x^n}{a+bx^n}\right)^\alpha\right]$$

8) $\int x^m \cdot (a+bx^n)^p \cdot dx = x^{m-n+1} \cdot (a+bx^n)^{p+1} \times$

$$\cdot S\left[(-1)^\alpha \cdot \frac{(m-n+1)^{\alpha|-n}}{(p+1)^{\alpha+1|1} \cdot n^{\alpha+1} \cdot b^{\alpha+1}} \cdot \left(\frac{a+bx^n}{x^n}\right)^\alpha\right]$$

Diese unendlichen Reihen erfordern aber in ihrer Anwendung, daß man den jedesmaligen Fehler beurtheile.

Tab VI. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx)^p}$.

$$1)\ \int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \cdot log\,(a+bx)$$

$$2)\ \int \frac{x \cdot dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \cdot log\,(a+bx)$$

$$3)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{a+bx} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \cdot log\,(a+bx)$$

$$4)\ \int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b \cdot (a+bx)}$$

$$5)\ \int \frac{x \cdot dx}{(a+bx)^2} = \frac{a}{b^2 \cdot (a+bx)} + \frac{1}{b^2} \cdot log\,(a+bx)$$

$$6)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2a^2}{b^3}\right) \cdot \frac{1}{a+bx} - \frac{2a}{b^3} \cdot log\,(a+bx)$$

$$7)\ \int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2b \cdot (a+bx)^2}$$

$$8)\ \int \frac{x \cdot dx}{(a+bx)^3} = -\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx)^2}$$

$$9)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{1}{b^3} \cdot log\,(a+bx)$$

Und allgemein

$$10)\ \int \frac{dx}{(a+bx)^p} = -\frac{1}{(p-1)\,b\,(a+bx)^{p-1}}$$

$$11)\ \int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx)^p} = \frac{1}{(a+bx)^{p-1}} \cdot \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\,=\,n-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{m^{\mathfrak{a}|-1} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot x^{m-\mathfrak{a}}}{(m-p+1)^{\mathfrak{a}+1|-1} \cdot b^{\mathfrak{a}+1}}\right]$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{m^{n|-1} \cdot a^n}{(m-p+1)^{n|-1} \cdot b^n} \int \frac{x^{m-n} \cdot dx}{(a+bx)^p}$$

Tab. VII. $\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^p}$.

$$1)\ \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)} = \frac{1}{a} \cdot \log \frac{x}{a+bx} = -\frac{1}{a} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$2)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx)} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$4)\ \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$5)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2b}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx} + \frac{2b}{a^3} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$6)\ \int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2 x} + \frac{3b^2}{a^3}\right) \cdot \frac{1}{a+bx} - \frac{3b^2}{a^4} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$7)\ \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)^3} = \left(\frac{3}{2a} + \frac{bx}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx)^2} - \frac{1}{a^3} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$8)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{9b}{2a^2} - \frac{3b^2 x}{a^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx)^2} + \frac{3b}{a^4} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

$$9)\ \int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx)^3}$$
$$= \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2 x} + \frac{9b^2}{a^3} + \frac{6b^3 x}{a^4}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx)^2} - \frac{6b^2}{a^5} \cdot \log \frac{a+bx}{x}$$

Und allgemein

$$10)\ \int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^p}$$
$$= \frac{1}{(a+bx)^{p-1}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \frac{(m+p-2)^{\mathfrak{a}|-1} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)^{\mathfrak{a}+1|-1} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{m-\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n-1}$$
$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{(m+p-2)^{n|-1} \cdot b^n}{(m-1)^{n|-1} \cdot a^n} \int \frac{dx}{x^{m-n} \cdot (a+bx)^p}$$

Tab. VIII. $\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{a+bx}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt{a+bx}},\ \int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}}.$

1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{a+bx}$$

2) $$\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx}} = \left[\tfrac{1}{3}(a+bx)-a\right]\cdot\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^2}$$

3) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{a+bx}} = \left[\tfrac{1}{5}(a+bx)^2-\tfrac{2}{3}a(a+bx)+a^2\right]\cdot\frac{2\sqrt{a+bx}}{b^3}$$

4) $$\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b^{m+1}}\cdot S\left[(-1)^{\alpha}\cdot\frac{m_{\alpha}\cdot a^{\alpha}\cdot(a+bx)^{m-\alpha}}{2m+1-2\alpha}\right]_{\alpha+\beta=m}$$

---

5) $$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}$$

6) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx}}$$

7) $$\int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt{a+bx}}$$
$$= \sqrt{a+bx}\cdot S\left[(-1)^{\alpha+1}\cdot\frac{(2m-3)^{\alpha|-2}\cdot b^{\alpha}}{(m-1)\cdot(2m-4)^{\alpha|-2}\cdot a^{\alpha+1}\cdot x^{m-\alpha-1}}\right]_{\alpha+\beta=m-2}$$
$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{(2m-3)^{m-1|-2}\cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2}\cdot a^{m-1}}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx}}$$

---

8) $$\int\frac{dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{b\sqrt{a+bx}}$$

9) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = (2a+bx)\cdot\frac{2}{b^2\sqrt{a+bx}}$$

10) $$\int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{b^{m+1}\sqrt{a+bx}}\cdot S\left[(-1)^{\alpha}\frac{m_{\alpha}\cdot a^{\alpha}\cdot(a+bx)^{m-\alpha}}{2m-2\alpha-1}\right]_{\alpha+\beta=m}$$

---

11) $$\int\frac{dx}{x\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{a\sqrt{a+bx}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx}}$$

12) $$\int\frac{dx}{x^m\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a+bx}}\cdot S\left[(-1)^{\alpha+1}\cdot\frac{(2m-1)^{\alpha|-2}\cdot b^{\alpha}}{(m-1)(2m-4)^{\alpha|-2}\cdot a^{\alpha+1}\cdot x^{m-\alpha-1}}\right]_{\alpha+\beta=m-2}$$
$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{(2m-1)^{m-1|-2}\cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2}\cdot a^{m-1}}\int\frac{dx}{x\cdot(a+bx)^{\frac{3}{2}}}$$

Tab. IX. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}, \quad \int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}}}.$

---

1) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3b \cdot (a+bx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

2) $$\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{b^{m+1} \cdot (a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{m_{\mathfrak{a}} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot (a+bx)^{m-\mathfrak{a}}}{2m-2\mathfrak{a}-3}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$

---

3) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{8}{3a} + \frac{2bx}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx) \cdot \sqrt{a+bx}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}}$$

4) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(a+bx)^{\frac{3}{2}}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \cdot \frac{(2m+1)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)(2m-4)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{m-\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}$$

$$+ (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2m+1)^{m-1|-2} \cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2} \cdot a^{m-1}} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)^{\frac{5}{2}}}$$

---

5) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = -\frac{2}{(n-2) b (a+bx)^{\frac{n-2}{2}}}$$

6) $$\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2}{b^{m+1} \cdot (a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{m_{\mathfrak{a}} \cdot a^{\mathfrak{a}} \cdot (a+bx)^{m-\mathfrak{a}}}{2m-2\mathfrak{a}-n+2}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$

---

7) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= 2 \cdot S\left[\frac{1}{(n-2\mathfrak{a}-2) \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}-\mathfrak{a}-1}}\right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-3} + \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(a+bx)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \cdot \frac{(2m+n-4)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)(2m-4)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{m-\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}$$

$$+ (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2m+n-4)^{m-1|-2} \cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2} \cdot a^{m-1}} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx)^{\frac{n}{2}}}$$

In (5.—8.) ist n als eine ungerade Zahl gedacht worden.

T. X. $\int x^m \cdot \sqrt{a+bx} \cdot dx$, $\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^m} \cdot dx$, $\int x^m \cdot (a+bx)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$, $\int \frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{x^m} \cdot dx$.

1) $$\int \sqrt{a+bx} \cdot dx = \frac{2(a+bx) \cdot \sqrt{a+bx}}{3b}$$

2) $$\int x \cdot \sqrt{a+bx} \cdot dx = \left(\tfrac{1}{5}(a+bx) - \tfrac{1}{3}a\right) \frac{2(a+bx) \cdot \sqrt{a+bx}}{b^2}$$

3) $$\int x^m \cdot \sqrt{a+bx} \cdot dx$$
$$= \frac{2(a+bx) \cdot \sqrt{a+bx}}{b^{m+1}} \cdot \underset{\alpha+\beta = m}{S}\left[(-1)^\alpha \cdot \frac{m_\alpha \cdot a^\alpha \cdot (a+bx)^{m-\alpha}}{2m+3-2\alpha}\right]$$

---

4) $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} \cdot dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}}$$

5) $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2} \cdot dx = -\frac{\sqrt{a+bx}}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}}$$

6) $$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^m} \cdot dx$$
$$= (a+bx)^{\frac{3}{2}} \cdot \underset{\alpha+\beta = m-2}{S}\left[(-1)^{\alpha+1} \cdot \frac{(2m-5)^{\alpha|-2} \cdot b^\alpha}{(m-1)(2m-4)^{\alpha|-2} \cdot a^{\alpha+1} \cdot x^{m-\alpha-1}}\right]$$
$$+ (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2m-5)^{m-1|-2} \cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2} \cdot a^{m-1}} \int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} \cdot dx$$

---

7) $$\int (a+bx)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{2(a+bx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}}{5b}$$

8) $$\int x \cdot (a+bx)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\tfrac{1}{7}(a+bx) - \tfrac{1}{5}a\right) \cdot \frac{2(a+bx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}}{b^2}$$

9) $$\int x^m \cdot (a+b)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{2(a+bx)^{\frac{5}{2}}}{b^{m+1}} \cdot \underset{\alpha+\beta = m}{S}\left[(-1)^\alpha \cdot \frac{m_\alpha \cdot a^\alpha \cdot (a+bx)^{m-\alpha}}{(2m+5-2\alpha)}\right]$$

---

10) $$\int \frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx = 2\left(\tfrac{1}{3}(a+bx) + a\right) \cdot \sqrt{a+bx} + a^2 \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}}$$

11) $$\int \frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{x^m} \cdot dx$$
$$= (a+bx)^{\frac{5}{2}} \cdot \underset{\alpha+\beta = m-2}{S}\left[(-1)^{\alpha+1} \cdot \frac{(2m-7)^{\alpha|-2} \cdot b^\alpha}{(m-1)(2m-4)^{\alpha|-2} \cdot a^{\alpha+1} \cdot x^{m-\alpha-1}}\right]$$
$$+ (-1)^{m-1} \cdot \frac{(2m-7)^{m-1|-2} \cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2} \cdot a^{m-1}} \int \frac{(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx$$

T.XI. $\int x^m\cdot(a+bx)^{\frac{5}{2}}\cdot dx,\ \int\frac{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}{x^m}\cdot dx,\ \int x^m\cdot(a+bx)^{\frac{n}{2}}\cdot dx,\ \int\frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{x^m}\cdot dx.$

1) $$\int(a+bx)^{\frac{5}{2}}\cdot dx=\frac{2(a+bx)^3\cdot\sqrt{a+bx}}{7b}$$

2) $$\int x^m\cdot(a+bx)^{\frac{5}{2}}\cdot dx$$
$$=\frac{2(a+bx)^3\cdot\sqrt{a+bx}}{b^3}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{m_{\mathfrak{a}}\cdot a^{\mathfrak{a}}\cdot(a+bx)^{m-\mathfrak{a}}}{2m+7-2\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$

---

3) $$\int\frac{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}{x}\cdot dx$$
$$=\left(\tfrac{1}{5}(a+bx)^2+\tfrac{1}{3}a(a+bx)+a^2\right)\cdot 2\sqrt{a+bx}+a^3\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx}}$$

4) $$\int\frac{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}{x^m}\cdot dx$$
$$=(a+bx)^{\frac{7}{2}}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\cdot\frac{(2m-9)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)(2m-4)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}\cdot x^{m-\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}$$
$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{(2m-9)^{m-1|-2}\cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2}\cdot a^{m-1}}\int\frac{(a+bx)^{\frac{5}{2}}}{x}\cdot dx$$

---

5) $$\int(a+bx)^{\frac{n}{2}}\cdot dx=\frac{2(a+bx)^{\frac{n+2}{2}}}{(n+2)b}$$

6) $$\int x^m\cdot(a+bx)^{\frac{n}{2}}\cdot dx=\frac{2(a+bx)^{\frac{n+2}{2}}}{b^{m+1}}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{m_{\mathfrak{a}}\cdot a^{\mathfrak{a}}\cdot(a+bx)^{m-\mathfrak{a}}}{2m+n+2-2\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$

---

7) $$\int\frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{x}\cdot dx=S\left[\frac{2\cdot a^{\mathfrak{a}}\cdot(a+bx)^{\frac{n}{2}-\mathfrak{a}}}{n-2\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}+a^{\mu}\int\frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}-\mu}}{x}\cdot dx$$

8) $$\int\frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{x^m}\cdot dx$$
$$=(a+bx)^{\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\cdot\frac{(2m-n-4)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)(2m-4)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}\cdot x^{m-\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}$$
$$+(-1)^{m-1}\cdot\frac{(2m-n-4)^{m-1|-2}\cdot b^{m-1}}{(2m-2)^{m-1|-2}\cdot a^{m-1}}\int\frac{(a+bx)^{\frac{n}{2}}}{x}\cdot dx$$

In (5.—8.) ist n als eine ungerade Zahl gedacht worden.

Γ. XII. $\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt[3]{a+bx}}$, $\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$, $\int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt[3]{a+bx}}$, $\int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$.

$$1)\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}}=\frac{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{2b}$$

$$2)\ \int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{a+bx}}=\left(\tfrac{1}{5}(a+bx)-\tfrac{1}{2}a\right)\frac{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{b^2}$$

$$3)\ \int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt[3]{a+bx}}=\left(\tfrac{1}{8}(a+bx)^2-\tfrac{2}{5}a(a+bx)+\tfrac{1}{2}a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{b^3}$$

$$4)\ \int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt[3]{a+bx}}$$
$$=\left(\tfrac{1}{11}(a+bx)^3-\tfrac{3}{8}a(a+bx)^2+\tfrac{3}{5}a^2(a+bx)-\tfrac{1}{2}a^3\right)\frac{3\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{b^4}$$

$$5)\ \int\frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=\frac{3\sqrt[3]{a+bx}}{b}$$

$$6)\ \int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=\left(\tfrac{1}{4}(a+bx)-a\right)\frac{3\sqrt[3]{a+bx}}{b^2}$$

$$7)\ \int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=\left(\tfrac{1}{7}(a+bx)^2-\tfrac{1}{2}a(a+bx)+a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{a+bx}}{b^3}$$

$$8)\ \int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=\left(\tfrac{1}{10}(a+bx)^3-\tfrac{3}{7}a(a+bx)^2+\tfrac{3}{4}a^2(a+bx)-a^3\right)\frac{3\sqrt[3]{a+bx}}{b^4}$$

$$9)\ \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left[\tfrac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{3}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a+bx}}{\sqrt[3]{a+bx}+2\sqrt[3]{a}}\right]$$

$$10)\ \int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{a+bx}}=-\frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{ax}-\frac{b}{3a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{a+bx}}$$

$$11)\ \int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{a+bx}}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt[3]{(a+bx)^2}+\frac{2b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{a+bx}}$$

$$12)\ \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left[\tfrac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a+bx}}-\sqrt{3}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{a+bx}}{\sqrt[3]{a+bx}+2\sqrt[3]{a}}\right]$$

$$13)\ \int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=-\frac{\sqrt[3]{a+bx}}{ax}-\frac{2b}{3a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$$

$$14)\ \int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{(a+bx)^2}}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{5b}{6a^2x}\right)\sqrt[3]{a+bx}+\frac{5b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$$

Tab. XIII.

$$\int x^m \cdot \sqrt[3]{a+bx} \cdot dx, \quad \int x^m \cdot \sqrt[3]{(a+bx)^2} \cdot dx, \quad \int \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{x^m} \cdot dx, \quad \int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{x^m} \cdot dx$$

---

1) $$\int \sqrt[3]{a+bx} \cdot dx = \frac{3(a+bx)\sqrt[3]{a+bx}}{4b}$$

2) $$\int x \cdot \sqrt[3]{a+bx} \cdot dx = \left(\tfrac{1}{7}(a+bx) - \tfrac{1}{4}a\right) \frac{3(a+bx)\sqrt[3]{a+bx}}{b^2}$$

3) $$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{a+bx} \cdot dx = \left(\tfrac{1}{10}(a+bx)^2 - \tfrac{2}{7}a(a+bx) + \tfrac{1}{4}a^2\right) \frac{3(a+bx)\sqrt[3]{a+bx}}{b^3}$$

4) $$\int x^3 \cdot \sqrt[3]{a+bx} \cdot dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{13}(a+bx)^3 - \tfrac{3}{10}a(a+bx)^2 + \tfrac{3}{7}a^2(a+bx) - \tfrac{1}{4}a^3\right) \frac{3(a+bx)^{\frac{4}{3}}}{b^4}$$

---

5) $$\int \sqrt[3]{(a+bx)^2} \cdot dx = \frac{3(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{5b}$$

6) $$\int x \cdot \sqrt[3]{(a+bx)^2} \cdot dx = \left(\tfrac{1}{8}(a+bx) - \tfrac{1}{5}a\right) \frac{3(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{b^2}$$

7) $$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{(a+bx)^2} \cdot dx = \left(\tfrac{1}{11}(a+bx)^2 - \tfrac{1}{4}a(a+bx) + \tfrac{1}{5}a^2\right) \frac{3(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{b^3}$$

8) $$\int x^3 \cdot \sqrt[3]{(a+bx)^2} \cdot dx$$

$$= \left(\tfrac{1}{14}(a+bx)^3 - \tfrac{3}{11}a(a+bx)^2 + \tfrac{3}{8}a^2(a+bx) - \tfrac{1}{5}a^3\right) \frac{3(a+bx)^{\frac{5}{3}}}{b^4}$$

---

9) $$\int \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{x} \cdot dx = 3\sqrt[3]{a+bx} + a \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{(a+bx)^2}}$$

10) $$\int \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{x^2} \cdot dx = -\frac{(a+bx)\sqrt[3]{a+bx}}{ax} + \frac{b}{3a} \int \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{x} \cdot dx$$

11) $$\int \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{x^3} \cdot dx = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{3a^2x}\right) \cdot (a+bx)^{\frac{4}{3}} - \frac{b^2}{9a^2} \int \frac{\sqrt[3]{a+bx}}{x} \cdot dx$$

---

12) $$\int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{x} \cdot dx = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{(a+bx)^2} + a \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt[3]{(a+bx)}}$$

13) $$\int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{x^2} \cdot dx = -\frac{(a+bx)\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{ax} + \frac{2b}{3a} \int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{x} \cdot dx$$

14) $$\int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{x^3} \cdot dx = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{6a^2x}\right) \cdot (a+bx)^{\frac{5}{3}} - \frac{b^2}{9a^2} \int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}{x} \cdot dx$$

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{a+bx} \cdot dx = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$ (S. die folgende Seite).

2) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{a+bx} \cdot dx = \left(\frac{x}{3b} - \frac{a}{b^2}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2} \int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{a+bx} \cdot dx = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{ax}{3b^2} + \frac{a^2}{b^3}\right) 2\sqrt{x} - \frac{a^3}{b^3} \int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$

4) $\int \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{a+bx} \cdot dx = \left(\frac{x^3}{7b} - \frac{ax^2}{5b^2} + \frac{a^2x}{3b^3} - \frac{a^3}{b^4}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^4}{b^4} \int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$

---

5) $\int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx = -\frac{\sqrt{x}}{b(a+bx)} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$

6) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx = \frac{2x \cdot \sqrt{x}}{b(a+bx)} - \frac{3a}{b} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx$

7) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{5ax}{3b^2}\right) \frac{2\sqrt{x}}{a+bx} + \frac{5a^2}{b^2} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx$

8) $\int \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx = \left(\frac{x^3}{5b} - \frac{7ax^2}{15b^2} + \frac{7a^2x}{3b^3}\right) \frac{2\sqrt{x}}{a+bx} - \frac{7a^3}{b^3} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^2} \cdot dx$

---

9) $\int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx$

$= \left(-\frac{1}{2b(a+bx)^2} + \frac{1}{4ab(a+bx)}\right)\sqrt{x} + \frac{1}{8ab} \int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$

10) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx = -\frac{2x \cdot \sqrt{x}}{b(a+bx)^2} + \frac{3a}{b} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx$

11) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{5ax}{b^2}\right) \frac{2\sqrt{x}}{(a+bx)^2} - \frac{15a^2}{b^2} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx$

12) $\int \frac{x^3 \cdot \sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx$

$= \left(\frac{x^3}{3b} - \frac{7ax^2}{3b^2} - \frac{35a^2x}{3b^3}\right) \frac{2\sqrt{x}}{(a+bx)^2} + \frac{35a^3}{b^3} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx)^3} \cdot dx$

Tab. XV. $\int \frac{dx}{x^m \cdot \sqrt{x} \cdot (a+bx)^p}$.

1) $$\int \frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}} = \pm\frac{2}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{Tg}\sqrt{\left(\frac{b}{a}x\right)}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{-ab}}\cdot \log\frac{a-bx+2\sqrt{-ab}\cdot\sqrt{x}}{a+bx}$$

2) $$\int \frac{dx}{(a+bx)\cdot x\sqrt{x}} = -\frac{2}{a\sqrt{x}} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$$

3) $$\int \frac{dx}{(a+bx)\cdot x^2\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{3ax}+\frac{b}{a^2}\right)\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{b^2}{a^2}\int\frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$$

4) $$\int \frac{dx}{(a+bx)\cdot x^3\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{5ax^2}+\frac{b}{3a^2x}-\frac{b^2}{a^3}\right)\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{b^3}{a^3}\int\frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$$

---

5) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a(a+bx)} + \frac{1}{2a}\int\frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$$

6) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2\cdot x\sqrt{x}} = -\frac{2}{a(a+bx)\cdot\sqrt{x}} - \frac{3b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}}$$

7) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2\cdot x^2\sqrt{x}} = \left(-\frac{1}{3ax}+\frac{5b}{3a^2}\right)\frac{2}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}} + \frac{5b^2}{a^2}\int\frac{dx}{(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}}$$

8) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2\cdot x^3\sqrt{x}}$$
$$= \left(-\frac{1}{5ax^2}+\frac{7b}{15a^2x}-\frac{7b^2}{3a^3}\right)\frac{2}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}} - \frac{7b^3}{a^3}\int\frac{dx}{(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}}$$

---

9) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3\cdot\sqrt{x}}$$
$$= \left(\frac{1}{2a(a+bx)^2}+\frac{3}{4a^2(a+bx)}\right)\cdot\sqrt{x} + \frac{3}{8a^2}\int\frac{dx}{(a+bx)\cdot\sqrt{x}}$$

10) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3\cdot x\sqrt{x}} = -\frac{2}{a(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}} - \frac{5b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx)^3\cdot\sqrt{x}}$$

11) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3\cdot x^2\sqrt{x}}$$
$$= \left(-\frac{1}{3ax}+\frac{7b}{3a^2}\right)\frac{2}{(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}} + \frac{35b^2}{3a^2}\int\frac{dx}{(a+bx)^3\cdot\sqrt{x}}$$

12) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3\cdot x^3\sqrt{x}}$$
$$= \left(-\frac{1}{5ax^2}+\frac{3b}{5a^2x}-\frac{21b^2}{5a^3}\right)\frac{2}{(a+bx)^2\cdot\sqrt{x}} + \frac{21b^3}{a^3}\int\frac{dx}{(a+bx)^3\cdot\sqrt{x}}$$

Tab. XVI. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(f+gx)^n \cdot \sqrt{a+bx}}, \int \frac{dx}{x^m \cdot (f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}, \; bf-ag = k.$

1) $$\int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}} = \pm \frac{2}{\sqrt{gk}} \cdot \frac{1}{Tg} \sqrt{\frac{g(a+bx)}{k}}$$

ober $$= \frac{1}{\sqrt{-gk}} \cdot \log \frac{bf-2ag-bgx+2\sqrt{-gk} \cdot \sqrt{a+bx}}{f+gx}.$$

2) $$\int \frac{x \cdot dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}} = \frac{1}{g} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} - \frac{f}{g} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

3) $$\int \frac{x^2 \cdot dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{1}{g} \int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a+bx}} - \frac{f}{g^2} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} + \frac{f^2}{g^2} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

4) $$\int \frac{dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}} = \frac{\sqrt{a+bx}}{k(f+gx)} + \frac{b}{2k} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

5) $$\int \frac{x \cdot dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{1}{g} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}} - \frac{f}{g} \int \frac{dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}}$$

6) $$\int \frac{x^2 \cdot dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{1}{g^2} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} - \frac{2f}{g^2} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}} + \frac{f^2}{g^2} \int \frac{dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}}$$

7) $$\int \frac{dx}{(f+gx)^3 \cdot \sqrt{a+bx}}$$
$$= \left(\frac{1}{2k(f+gx)^2} + \frac{3b}{4k^2(f+gx)} \right) \sqrt{a+bx} + \frac{3b^2}{8k^2} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

8) $$\int \frac{x \cdot dx}{(f+gx)^3 \cdot \sqrt{a+bx}} = \frac{1}{g} \int \frac{dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}} - \frac{f}{g} \int \frac{dx}{(f+gx)^3 \cdot \sqrt{a+bx}}$$

9) $$\int \frac{x^2 \cdot dx}{(f+gx)^3 \cdot \sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{1}{g^2} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}} - \frac{2f}{g^2} \int \frac{dx}{(f+gx)^2 \cdot \sqrt{a+bx}} + \frac{f^2}{g^2} \int \frac{dx}{(f+gx)^3 \cdot \sqrt{a+bx}}$$

10) $$\int \frac{dx}{x \cdot (f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}} = \frac{1}{f} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}} - \frac{g}{f} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

11) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{1}{f} \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{a+bx}} - \frac{g}{f^2} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx}} + \frac{g^2}{f^2} \int \frac{dx}{(f+gx) \cdot \sqrt{a+bx}}$$

Tab. XVII. $\int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^2)^p}$.

1) $$\int\frac{dx}{a+bx^2}=\frac{1}{a\sqrt{\frac{b}{a}}}\cdot\frac{1}{Tg}\cdot x\sqrt{\frac{b}{a}}=\frac{1}{2a\sqrt{-\frac{b}{a}}}\cdot log\frac{\sqrt{a}+x\cdot\sqrt{-b}}{\sqrt{a}-x\cdot\sqrt{-b}}$$

2) $$\int\frac{x\cdot dx}{a+bx^2}=\frac{1}{2b}\cdot log\,(a+bx^2)$$

3) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{a+bx^2}=\frac{x}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

4) $$\int\frac{x^3\cdot dx}{a+bx^2}=\frac{x^2}{2b}-\frac{a}{b}\int\frac{x\cdot dx}{a+bx^2}$$

5) $$\int\frac{x^4\cdot dx}{a+bx^2}=\frac{x^3}{3b}-\frac{ax}{b^2}+\frac{a^2}{b^2}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

---

6) $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{x}{2a(a+bx^2)}+\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

7) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx^2)^2}=-\frac{1}{2b(a+bx^2)}$$

8) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^2)^2}=-\frac{x}{2b(a+bx^2)}+\frac{1}{2b}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

9) $$\int\frac{x^3\cdot dx}{(a+bx^2)^2}=\frac{a}{2b^2(a+bx^2)}+\frac{1}{2b^2}\cdot log\,(a+bx^2)$$

---

10) $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^3}=\left(\frac{3bx^3}{8a^2}+\frac{5x}{8a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^2)^2}+\frac{3}{8a^2}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

11) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx^2)^3}=-\frac{1}{4b(a+bx^2)^2}$$

12) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^2)^3}=\left(\frac{x^3}{8a}-\frac{x}{8b}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^2)^2}+\frac{1}{8ab}\int\frac{dx}{a+bx^2}$$

13) $$\int\frac{x^3\cdot dx}{(a+bx^2)^3}=-\left(\frac{x^2}{2b}+\frac{a}{4b^2}\right)\frac{1}{(a+bx^2)^2}$$

Und allgemein

14) $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^p}=x\cdot \underset{\alpha+\beta=n-1}{S}\left[\frac{(2p-3)^{\alpha|-2}}{(2p-2)^{\alpha+1|-2}\cdot a^{\alpha+1}\cdot(a+bx^2)^{p-\alpha-1}}\right]+\frac{(2p-3)^{n|-2}}{(2p-2)^{n|-2}\cdot a^n}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{p-n}}$$

15) $$\int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^2)^p}=\frac{1}{(a+bx^2)^{p-1}}\underset{\alpha+\beta=n-1}{S}\cdot\left[(-1)^\alpha\cdot\frac{(m-1)^{\alpha|-2}\cdot a^\alpha\cdot x^{m-2\alpha-1}}{(m-2p+1)^{\alpha+1|-2}\cdot b^{\alpha+1}}\right]+(-1)^n\cdot\frac{(m-1)^{n|-2}\cdot a^n}{(m-2p+1)^{n|-2}\cdot b^n}\int\frac{x^{m-2n}\cdot dx}{(a+bx^2)^p}$$

16) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx^2)^p}=-\frac{1}{2b(p-1)(a+bx^2)^{p-1}}$$

$$1)\ \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)} = \frac{1}{2a} \cdot \log \frac{x^2}{a+bx^2} = -\frac{1}{2a} \cdot \log \frac{a+bx^2}{x^2}$$

$$2)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$3)\ \int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^2)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)}$$

$$4)\ \int \frac{dx}{x^4 \cdot (a+bx^2)} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2 x} + \frac{b^2}{a^2} \int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$5)\ \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)^2} = \frac{1}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)}$$

$$6)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^2)^2} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{3bx}{2a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx^2} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$7)\ \int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^2)^2} = -\left(\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx^2} - \frac{2b}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)}$$

$$8)\ \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)^3} = \left(\frac{3}{4a} + \frac{bx^2}{2a^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^2)^2} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)}$$

$$9)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^2)^3}$$
$$= -\left(\frac{1}{ax} + \frac{25bx}{8a^2} - \frac{15b^2x^3}{8a^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^2)^2} - \frac{15b}{8a^3} \int \frac{dx}{a+bx^2}$$

$$10)\ \int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^2)^3}$$
$$= -\left(\frac{1}{2ax^2} + \frac{9b}{4a^2} + \frac{3b^2x^2}{2a^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^2)^2} - \frac{3b}{a^3} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^2)}$$

Und allgemein

$$11)\ \int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^2)^p}$$
$$= \frac{1}{(a+bx^2)^{p-1}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \cdot \frac{(m+2p-3)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{m-2\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-1}$$
$$+ (-1)^{n+1} \cdot \frac{(m+2p-3)^{n|-2} \cdot b^n}{(m-1)^{n|-2} \cdot a^n} \int \frac{dx}{x^{m-2n} \cdot (a+bx^2)^p}$$

T. XIX. $\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{a+bx^2}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt{a+bx^2}},\ \int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$

1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\cdot log\left(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{-b}}\cdot\frac{1}{Sin}\,x\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

2) $$\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx^2}}{b}$$

3) $$\int\frac{x^{2m}\cdot dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \sqrt{a+bx^2}\cdot S\left[(-1)^{\alpha}\cdot\frac{(2m-1)^{\alpha|-2}\cdot a^{\alpha}}{(2m)^{\alpha+1|-2}\cdot b^{\alpha+1}}\cdot x^{2m-2\alpha-1}\right]_{\alpha+\beta=m-1}$$
$$+(-1)^m\cdot\frac{(2m-1)^{m|-2}\cdot a^m}{(2m)^{m|-2}\cdot b^m}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

4) $$\int\frac{x^{2m+1}\cdot dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \sqrt{a+bx^2}\cdot S\left[(-1)^{\alpha}\cdot\frac{(2m)^{\alpha|-2}\cdot a^{\alpha}}{(2m+1)^{\alpha+1|-2}\cdot b^{\alpha+1}}\cdot x^{2m-2\alpha}\right]_{\alpha+\beta=m}$$

---

5) $$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\cdot log\frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{1}{Sec}\,x\sqrt{-\frac{b}{a}}$$

6) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{ax}$$

7) $$\int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx^2}}{2ax^2}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx}}$$

---

8) $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{a\sqrt{a+bx^2}}$$

9) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{b\sqrt{a+bx^2}}$$

10) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{b\sqrt{a+bx^2}}+\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

11) $$\int\frac{x^3\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{x^2}{b}+\frac{2a}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$$

---

12) $$\int\frac{dx}{x\cdot(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a\sqrt{a+bx^2}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

13) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{ax}-\frac{2bx}{a^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}$$

14) $$\int\frac{dx}{x^3\cdot(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{3b}{2a^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}-\frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

T. XX. $\int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\int\frac{dx}{x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{7}{2}}}$, $\int\frac{dx}{x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{7}{2}}}$.

1) $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\left(\frac{2bx^3}{3a^2}+\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$$

2) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{3b\cdot(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$$

3) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{x^3}{3a\cdot(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}$$

4) $$\int\frac{dx}{x\cdot(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\left(\frac{4}{3a}+\frac{bx^2}{a^2}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}+\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

5) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{ax\cdot(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}-\frac{4b}{a}\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$

6) $$\int\frac{dx}{x^3\cdot(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{2ax^2\cdot(a+bx^2)\sqrt{a+bx^2}}-\frac{5b}{2a}\int\frac{dx}{x(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$

7) $$\int\frac{dx}{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{a+bx^2}}\cdot S\left[\frac{(n-3)^{\mathfrak{a}|-2}}{(n-2)^{\mathfrak{a}+1|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}\cdot(a+bx^2)^{\frac{n-3-2\mathfrak{a}}{2}}}\right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-3}$$

8) $$\int\frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$=(a+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{(m-1)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}}}{(m-n+1)^{\mathfrak{a}+1|-2}\cdot b^{\mathfrak{a}+1}}\cdot x^{m-2\mathfrak{a}-1}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}\cdot\frac{(m-1)^{\mu|-2}\cdot a^{\mu}}{(m-n+1)^{\mu|-2}\cdot b^{\mu}}\int\frac{x^{m-2\mu}}{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot dx$$

9) $$\int\frac{dx}{x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$=(a+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\cdot\frac{(m+n-3)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)^{\mathfrak{a}+1|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}\cdot x^{m-2\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}\cdot\frac{(m+n-3)^{\mu|-2}\cdot b^{\mu}}{(m-1)^{\mu|-2}\cdot a^{\mu}}\int\frac{dx}{x^{m-2\mu}\cdot(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

10) $$\int\frac{dx}{x\cdot(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{a+bx^2}}\cdot S\left[\frac{1}{(n-2-2\mathfrak{a})\cdot a^{\mathfrak{a}+1}\cdot(a+bx^2)^{\frac{n-3-2\mathfrak{a}}{2}}}\right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-3}+\frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

In 8 — 11.) ist n als eine ungerade Zahl gedacht worden.

11) $$\int\frac{x\cdot dx}{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}=-\frac{1}{b(n-2)(a+bx^2)^{\frac{n}{2}-1}}$$

Tab. XXI.

$$\int x^m \cdot \sqrt{a+bx^2} \cdot dx, \quad \int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x^m} \cdot dx, \quad \int x^m \cdot (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx, \quad \int \frac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x^m} \cdot dx$$

1) $$\int \sqrt{a+bx^2} \cdot dx = \frac{x \cdot \sqrt{a+bx^2}}{2} + \tfrac{1}{2}a \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

2) $$\int x \cdot \sqrt{a+bx^2} \cdot dx = \frac{(a+bx^2) \cdot \sqrt{a+bx^2}}{3b}$$

3) $$\int x^{2m} \cdot \sqrt{a+bx^2} \cdot dx$$

$$= x \cdot (a+bx^2) \cdot \sqrt{a+bx^2} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(2m-1)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}}}{(2m+2)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}+1}} \cdot x^{2m-2\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}$$

$$+ (-1)^m \cdot \frac{(2m-1)^{m-1|-2} \cdot a^m}{(2m+2)^{m|-2} \cdot b^m} \int \sqrt{a+bx^2} \cdot dx$$

4) $$\int x^{2m+1} \sqrt{a+bx^2} \cdot dx$$

$$= (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(2m)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}}}{(2m+3)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}+1}} \cdot x^{2m-2\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m}$$

---

5) $$\int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x} \cdot dx = \sqrt{a+bx^2} + a \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx^2}}$$

6) $$\int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x^{2m}} \cdot dx$$

$$= (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \cdot \frac{(2m-4)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(2m-1)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{2m-2\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-2}$$

7) $$\int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x^{2m+1}} \cdot dx = (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \cdot \frac{(2m-3)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(2m)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{2m-2\mathfrak{a}}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}$$

$$+ (-1)^m \cdot \frac{(2m-3)^{m|-2} \cdot b^m}{(2m)^{m|-2} \cdot a^m} \int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{x} \cdot dx$$

---

8) $$\int (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\frac{a+bx^2}{4} + \frac{3a}{8}\right) \cdot x\sqrt{a+bx^2} + \frac{3a^2}{8} \int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

9) $$\int x \cdot (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{(a+bx^2)^2 \cdot \sqrt{a+bx^2}}{5b}$$

10) $$\int x^2 \cdot (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{x \cdot (a+bx^2)^2 \cdot \sqrt{a+bx^2}}{6b} - \frac{a}{6b} \int (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

---

11) $$\int \frac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx = \left(\frac{a+bx^2}{3} + a\right) \cdot \sqrt{a+bx^2} + a^2 \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a+bx^2}}$$

12) $$\int \frac{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} \cdot dx = -\frac{(a+bx^2)^2 \cdot \sqrt{a+bx^2}}{ax} + \frac{4b}{a} \int (a+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

Tab. XXII.

$$\int x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx,\ \int\frac{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x^m}\cdot dx,\ \int x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{7}{2}}\cdot dx,\ \int\frac{(a+bx^2)^{\frac{7}{2}}}{x^m}\cdot dx.$$

$$1)\int (a+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx$$
$$=\left(\frac{(a+bx^2)^2}{6}+\frac{5a(a+bx^2)}{24}+\frac{5a^2}{16}\right)\cdot x\sqrt{a+bx^2}+\frac{5a^3}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$2)\int x\cdot(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx=\frac{(a+bx^2)^3\cdot\sqrt{a+bx^2}}{7b}$$

$$3)\int\frac{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x}\cdot dx$$
$$=\left(\frac{(a+bx^2)^2}{5}+\frac{a(a+bx^2)}{3}+a^2\right)\cdot\sqrt{a+bx^2}+a^3\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

$$4)\int\frac{(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x^2}\cdot dx=-\frac{(a+bx^2)^3\cdot\sqrt{a+bx^2}}{ax}+\frac{6b}{a}\int(a+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx$$

$$5)\int (a+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx=x\cdot\sqrt{a+bx^2}\cdot S\left[\frac{n^{\mathfrak{a}|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}}}{(n+1)^{\mathfrak{a}+1|-2}}\cdot(a+bx^2)^{\frac{n-1-2\mathfrak{a}}{2}}\right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-1}$$
$$+\frac{n^{\frac{n+1}{2}|-2}\cdot a^{\frac{n+1}{2}}}{(n+1)^{\frac{n+1}{2}|-2}}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}}$$

$$6)\int x^m\cdot(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx$$
$$=(a+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}\cdot\frac{(m-1)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}}}{(m+n+1)^{\mathfrak{a}+1|-2}\cdot b^{\mathfrak{a}+1}}\cdot x^{m-2\mathfrak{a}-1}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}\cdot\frac{(m-1)^{\mu|-2}\cdot a^{\mu}}{(m+n+1)^{\mu|-2}\cdot b^{\mu}}\int x^{m-2\mu}\cdot(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx$$

$$7)\int\frac{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^m}\cdot dx$$
$$=(a+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1}\cdot\frac{(m-n-3)^{\mathfrak{a}|-2}\cdot b^{\mathfrak{a}}}{(m-1)^{\mathfrak{a}+1|-2}\cdot a^{\mathfrak{a}+1}\cdot x^{m-2\mathfrak{a}-1}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}\cdot\frac{(m-n-3)^{\mu|-2}\cdot b^{\mu}}{(m-1)^{\mu|-2}\cdot a^{\mu}}\int\frac{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^{m-2\mu}}\cdot dx$$

$$8)\int\frac{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x}\cdot dx=\sqrt{a+bx^2}\cdot S\left[\frac{(a+bx^2)^{\frac{n-1-2\mathfrak{a}}{2}}\cdot a^{\mathfrak{a}}}{n-2\mathfrak{a}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\frac{n-1}{2}}+a^{\frac{n+1}{2}}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

In (6.—9.) ist n als eine ungerade Zahl gedacht worden.

$$9)\int x(a+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx=\frac{(a+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}}{(n+2)b}$$

Tab. XXIII. $\int \frac{x^m \cdot \sqrt{x}}{(a+bx^2)^p} \cdot dx, \quad \int \frac{dx}{(a+bx^2)^p \cdot \sqrt{x}}.$

---

1) $\int \frac{\sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx = \frac{1}{bk\sqrt{2}} \left[-\log \frac{x+k^2+k\sqrt{2x}}{\sqrt{a+bx^2}} + \frac{1}{Tg} \frac{k\sqrt{2x}}{k^2-x} \right]$, wo $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

oder $= \frac{1}{2bh} \left[\log \frac{h-\sqrt{x}}{h+\sqrt{x}} + 2 \cdot \frac{1}{Tg} \frac{\sqrt{x}}{h} \right]$, wo $h = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$

2) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{(a+bx^2) \cdot \sqrt{x}}$ (S. die folgende Seite.)

3) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3b} - \frac{a}{b} \int \frac{\sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx$

---

4) $\int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx^2)^2} \cdot dx = \frac{x \cdot \sqrt{x}}{2a(a+bx^2)} + \frac{1}{4a} \int \frac{\sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx$

5) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(a+bx^2)^2} \cdot dx = -\frac{\sqrt{x}}{2b(a+bx^2)} + \frac{1}{4b} \int \frac{dx}{(a+bx^2) \cdot \sqrt{x}}$

6) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{(a+bx^2)^2} \cdot dx = -\frac{x \cdot \sqrt{x}}{2b(a+bx^2)} + \frac{3}{4b} \int \frac{\sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx$

---

7) $\int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} \cdot dx$

$= \left(\frac{1}{4a(a+bx^2)^2} + \frac{5}{16a^2(a+bx^2)} \right) \cdot x \cdot \sqrt{x} + \frac{5}{32a^2} \int \frac{\sqrt{x}}{a+bx^2} \cdot dx$

8) $\int \frac{x \cdot \sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} \cdot dx = \frac{(bx^2-3a) \cdot \sqrt{x}}{16ab(a+bx^2)^2} + \frac{3}{32ab} \int \frac{dx}{(a+bx^2) \cdot \sqrt{x}}$

9) $\int \frac{x^2 \cdot \sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} \cdot dx = -\frac{2x \cdot \sqrt{x}}{5b(a+bx^2)^2} + \frac{3a}{5b} \int \frac{\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} \cdot dx$

---

10) $\int \frac{dx}{(a+bx^2) \cdot \sqrt{x}} = \frac{1}{bk^3\sqrt{2}} \cdot \left[\log \frac{x+k\sqrt{2x}+k^2}{\sqrt{a+bx^2}} + \frac{1}{Tg} \frac{k\sqrt{2x}}{k^2-x} \right]$, wo $k = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$

oder $= \frac{1}{2bh^3} \cdot \log \left[\frac{h-\sqrt{x}}{h+\sqrt{x}} - 2 \cdot \frac{1}{Tg} \frac{\sqrt{x}}{h} \right]$, wo $h = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$

11) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2 \cdot \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2a(a+bx^2)} + \frac{3}{4a} \int \frac{dx}{(a+bx^2) \cdot \sqrt{x}}$

12) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^3 \cdot \sqrt{x}}$

$= \left(\frac{1}{4a(a+bx^2)^2} + \frac{7}{16a^2(a+bx^2)} \right) \cdot \sqrt{x} + \frac{21}{32a^2} \int \frac{dx}{(a+bx^2) \cdot \sqrt{x}}$

Tab. XXIV. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$, $\int \frac{dx}{x^m\cdot(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$,

$\int \frac{x^m \cdot dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$, $\int \frac{x^m\cdot\sqrt{a+bx^2}}{f+gx^2}\cdot dx$, $k = ag^2 + bf^2$.

---

1) $$\int \frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot \log \frac{ag-bfx\mp\sqrt{k}\cdot\sqrt{a+bx^2}}{f+gx}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{-k}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{ag-bfx}{\sqrt{-k}\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

2) $$\int \frac{x\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{g}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} - \frac{f}{g}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

3) $$\int \frac{x^2\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$
$$= \frac{1}{g}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx^2}} - \frac{f}{g^2}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} + \frac{f^2}{g^2}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

---

4) $$\int \frac{dx}{x\cdot(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{f}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}} - \frac{g}{f}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

5) $$\int \frac{dx}{x^2\cdot(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$
$$= \frac{1}{f}\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{a+bx^2}} - \frac{g}{f^2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{a+bx^2}} + \frac{g^2}{f^2}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

---

6) $$\int \frac{dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{bf^2-afg}}\cdot\log\frac{f\cdot\sqrt{a+bx^2}+x\sqrt{bf^2-afg}}{\sqrt{f+gx^2}}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{afg-bf^2}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{x\sqrt{afg-bf^2}}{f\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

7) $$\int \frac{x\cdot dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{ag^2-bfg}}\cdot\log\frac{g\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{ag^2-bfg}}{\sqrt{f+gx^2}}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{bfg-ag^2}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{g\sqrt{a+bx^2}}{\sqrt{bfg-ag^2}}$$

8) $$\int \frac{x^2\cdot dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{g}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} - \frac{f}{g}\int\frac{dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

---

9) $$\int \frac{\sqrt{a+bx^2}}{f+gx^2}\cdot dx = \frac{b}{g}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} + \left(a-\frac{bf}{g}\right)\int\frac{dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

10) $$\int \frac{x\cdot\sqrt{a+bx^2}}{f+gx^2}\cdot dx = \frac{b}{g}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{a+bx^2}} + \left(a-\frac{bf}{g}\right)\int\frac{x\cdot dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

11) $$\int \frac{x^2\cdot\sqrt{a+bx^2}}{f+gx^2}\cdot dx = \frac{b}{g}\int\frac{x^2}{\sqrt{a+bx^2}}\cdot dx$$
$$+\left(\frac{a}{g}-\frac{bf}{g^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} - \left(\frac{af}{g}-\frac{bf^2}{g^2}\right)\int\frac{dx}{(f+gx^2)\cdot\sqrt{a+bx^2}}$$

Tab. XXV. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx^3)^p}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$.

$$1)\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk^2}\left(\frac{1}{2}\,log\,\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right)$$

$$2)\int \frac{x\cdot dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3bk}\left(-\frac{1}{2}\,log\,\frac{(x+k)^2}{x^2-kx+k^2} + \sqrt{3}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right)$$

$$3)\int \frac{x^2\cdot dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3b}\cdot log\,(a+bx^3)$$

$$4)\int \frac{x^m\cdot dx}{a+bx^3} = \frac{x^{m-2}}{(m-2)b} - \frac{a}{b}\int \frac{x^{m-3}\cdot dx}{(a+bx^3)}$$

$$5)\int \frac{dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x}{3a(a+bx^3)} + \frac{2}{3a}\int \frac{dx}{a+bx^3}$$

$$6)\int \frac{x\cdot dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x^2}{3a(a+bx^3)} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\cdot dx}{a+bx^3}$$

$$7)\int \frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{1}{3b(a+bx^3)}$$

$$8)\int \frac{x^3\cdot dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{x}{3b(a+bx^3)} + \frac{1}{3b}\int \frac{dx}{a+bx^3}$$

$$9)\int \frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x^{m-2}}{(m-5)b(a+bx^3)} - \frac{(m-2)a}{(m-5)b}\int \frac{x^{m-3}\cdot dx}{(a+bx^3)^2}$$

$$10)\int \frac{dx}{(a+bx^3)^3} = \left(\frac{5bx^4}{18a^2} + \frac{4x}{9a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^3)^2} + \frac{5}{9a^2}\int \frac{dx}{a+bx^3}$$

$$11)\int \frac{x\cdot dx}{(a+bx^3)^3} = \left(\frac{2bx^5}{9a^2} + \frac{7x^2}{18a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^3)^2} + \frac{2}{9a^2}\int \frac{x\cdot dx}{a+bx^3}$$

$$12)\int \frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^3)^3} = -\frac{1}{6b(a+bx^3)^2}$$

$$13)\int \frac{x^3\cdot dx}{(a+bx^3)^3} = \left(\frac{x^4}{18a} + \frac{x}{9b}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^3)^2} + \frac{1}{9ab}\int \frac{dx}{a+bx^3}$$

Und allgemein

$$14)\int \frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^3)^p} = \frac{x^{m-2}}{(m-3p+1)b(a+bx^3)^{p-1}} - \frac{(m-2)a}{(m-3p+1)b}\int \frac{x^{m-3}\cdot dx}{(a+bx^3)^p}$$

Tab. XXVI. $\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^3)^p}$.

1) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^3)} = \frac{1}{3a} \cdot \log \frac{x^3}{a+bx^3} = -\frac{1}{3a} \cdot \log \frac{a+bx^3}{x^3}$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^3)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{x \cdot dx}{a+bx^3}$$

3) $$\int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^3)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a+bx^3}$$

4) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^3)} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{m-3} \cdot (a+bx^3)}$$

---

5) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^3)^2} = \frac{1}{3a(a+bx^3)} - \frac{1}{3a^2} \cdot \log \frac{a+bx^3}{x^3}$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^3)^2} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{4bx^2}{3a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx^3} - \frac{4b}{3a^2} \int \frac{x \cdot dx}{a+bx^3}$$

7) $$\int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^3)^2} = -\left(\frac{1}{2ax^2} + \frac{5bx}{6a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx^3} - \frac{5b}{3a^2} \int \frac{dx}{a+bx^3}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^3)^2}$$
$$= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot (a+bx^3)} - \frac{(m+2)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-3} \cdot (a+bx^3)^2}$$

---

9) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^3)^3} = \left(\frac{1}{2a} + \frac{bx^3}{3a^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^3)^2} - \frac{1}{3a^3} \cdot \log \frac{a+bx^3}{x^3}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^3)^3}$$
$$= -\left(\frac{1}{ax} + \frac{49bx^2}{18a^2} + \frac{14b^2x^5}{9a^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^3)^2} - \frac{14b}{9a^3} \int \frac{x \cdot dx}{a+bx^3}$$

11) $$\int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^3)^3}$$
$$= -\left(\frac{1}{2ax^2} + \frac{16bx}{9a^2} + \frac{10b^2x^4}{9a^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^3)^2} - \frac{20b}{9a^3} \int \frac{dx}{a+bx^3}$$

Und allgemein

12) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^3)^p}$$
$$= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot (a+bx^3)^{p-1}} - \frac{(m+3p-4)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-3} \cdot (a+bx^3)^p}$$

Tab. XXVII. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx^4)^p}$, wenn $\sqrt[4]{+\frac{a}{b}} = h$, $\sqrt[4]{-\frac{a}{b}} = k$ ist.

$$1)\ \int \frac{dx}{a+bx^4} = \frac{1}{4bh^3\sqrt{2}}\left(log\frac{x^2+hx\sqrt{2}+h^2}{x^2-hx\sqrt{2}+h^2}+2\cdot\frac{1}{Tg}\frac{hx\sqrt{2}}{h^2-x^2}\right)$$

$$\text{oder } = -\frac{1}{4bk^3}\left(log\frac{x+k}{x-k}+2\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x}{k}\right)$$

$$2)\ \int \frac{x\cdot dx}{a+bx^4} = \frac{1}{2bh^2}\cdot\frac{1}{Tg}x^2\sqrt{\frac{b}{a}} = -\frac{1}{4bk^2}\cdot log\frac{x^2+k^2}{x^2-k^2}$$

$$3)\ \int \frac{x^2\cdot dx}{a+bx^4} = \frac{1}{4bh\sqrt{2}}\left(-log\frac{x^2+hx\sqrt{2}+h^2}{x^2-hx\sqrt{2}+h^2}+2\cdot\frac{1}{Tg}\frac{hx\sqrt{2}}{h^2-x^2}\right)$$

$$\text{oder } = -\frac{1}{4bk}\left(log\frac{x+k}{x-k}-2\cdot\frac{1}{Tg}\frac{x}{k}\right)$$

$$4)\ \int \frac{x^m\cdot dx}{a+bx^4} = \frac{x^{m-3}}{(m-3)b}-\frac{a}{b}\int\frac{x^{m-4}\cdot dx}{a+bx^4}$$

$$5)\ \int \frac{dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x}{4a(a+bx^4)}+\frac{3}{4a}\int\frac{dx}{a+bx^4}$$

$$6)\ \int \frac{x\cdot dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x^2}{4a(a+bx^4)}+\frac{1}{2a}\int\frac{x\cdot dx}{a+bx^4}$$

$$7)\ \int \frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x^3}{4a(a+bx^4)}+\frac{1}{4a}\int\frac{x^2\cdot dx}{a+bx^4}$$

$$8)\ \int \frac{dx}{(a+bx^4)^3} = \left(\frac{7bx^5}{32a^2}+\frac{11x}{32a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^4)^2}+\frac{21}{32a^2}\int\frac{dx}{a+bx^4}$$

$$9)\ \int \frac{x\cdot dx}{(a+bx^4)^3} = \left(\frac{3bx^6}{16a^2}+\frac{5x^2}{16a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^4)^2}+\frac{3}{8a^2}\int\frac{x\cdot dx}{a+bx^4}$$

$$10)\ \int \frac{x^2\cdot dx}{(a+bx^4)^3} = \left(\frac{5bx^7}{32a^2}+\frac{9x^3}{32a}\right)\cdot\frac{1}{(a+bx^4)^2}+\frac{5}{32a^2}\int\frac{x^2\cdot dx}{a+bx^4}$$

Und allgemein

$$11)\ \int \frac{x^m\cdot dx}{(a+bx^4)^p} = \frac{x^{m-3}}{(m-4p+1)b(a+bx^4)^{p-1}}-\frac{(m-3)a}{(m-4p+1)b}\int\frac{x^{m-4}\cdot dx}{(a+bx^4)^p}$$

Tab. XXVIII. $\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^4)^p}$.

1) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^4)} = -\frac{1}{4a} \cdot \log \frac{a+bx^4}{x^4}$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^4)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{x^2 \cdot dx}{a+bx^4}$$

3) $$\int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^4)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a} \int \frac{x \cdot dx}{a+bx^4}$$

4) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^4)} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{m-4} \cdot (a+bx^4)}$$

---

5) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^4)^2} = \frac{1}{4a(a+bx^4)} + \frac{1}{a} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^4)}$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^4)^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{5bx^3}{4a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx^4} - \frac{5b}{4a^2} \int \frac{x^2 \cdot dx}{a+bx^4}$$

7) $$\int \frac{dx}{x^3 \cdot (a+bx^4)^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3bx^2}{4a^2}\right) \cdot \frac{1}{a+bx^4} - \frac{3b}{2a^2} \int \frac{x \cdot dx}{a+bx^4}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^4)^2}$$
$$= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot (a+bx^4)} - \frac{(m+3)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-4} \cdot (a+bx^4)^2}$$

---

9) $$\int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^4)^3} = \left(\frac{3}{8a} + \frac{bx^4}{4a^2}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^4)^2} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot (a+bx^4)}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot (a+bx^4)^3}$$
$$= \left(-\frac{1}{ax} - \frac{81bx^3}{32a^2} - \frac{43b^2x^7}{32a^3}\right) \cdot \frac{1}{(a+bx^4)^2} - \frac{45b}{32a^3} \int \frac{x^2 \cdot dx}{a+bx^4}$$

Und allgemein

11) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^4)^p}$$
$$= -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot (a+bx^4)^{p-1}} - \frac{(m+4p-5)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-4} \cdot (a+bx^4)^p}$$

T. XXIX. $\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{ax+bx^2}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt{ax+bx^2}},\ \int\frac{x^m\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$

---

1) $$\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\frac{1}{\sqrt{b}}\cdot log\frac{\sqrt{ax+bx^2}+x\sqrt{b}}{\sqrt{ax+bx^2}-x\sqrt{b}}=\frac{2}{\sqrt{-b}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{x\cdot\sqrt{-b}}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

2) $$\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\frac{\sqrt{ax+bx^2}}{b}-\frac{a}{2b}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

3) $$\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{ax+bx^2}}=\sqrt{ax+bx^2}\cdot \underset{\alpha+\beta=m-1}{S}\left[(-1)^{\alpha}\cdot\frac{(2m-1)^{\alpha|-2}\cdot a^{\alpha}}{m^{\alpha+1|-1}\cdot b^{\alpha+1}\cdot 2^{\alpha}}\cdot x^{m-\alpha-1}\right]$$
$$+(-1)^m\cdot\frac{(2m-1)^{m|-2}\cdot a^m}{m^{m|-1}\cdot b^m\cdot 2^m}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

---

4) $$\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{ax+bx^2}}=-\frac{2\sqrt{ax+bx^2}}{ax}$$

5) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{ax+bx^2}}=\left(-\frac{1}{3ax^2}+\frac{2b}{3a^2x}\right)\cdot 2\sqrt{ax+bx^2}$$

6) $$\int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt{ax+bx^2}}$$
$$=\sqrt{ax+bx^2}\cdot \underset{\alpha+\beta=m-1}{S}\left[(-1)^{\alpha+1}\cdot\frac{2^{\alpha+1}\cdot(m-1)^{\alpha|-1}\cdot b^{\alpha}}{(2m-1)^{\alpha+1|-2}\cdot a^{\alpha+1}\cdot x^{m-\alpha}}\right]$$

---

7) $$\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2(2bx+a)}{a^2\sqrt{ax+bx^2}}$$

8) $$\int\frac{x\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2x}{a\sqrt{ax+bx^2}}$$

9) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2x}{b\sqrt{ax+bx^2}}+\frac{1}{b}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

10) $$\int\frac{x^3\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{x^2}{b}+\frac{3ax}{b^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{ax+bx^2}}-\frac{3a}{2b^2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

---

11) $$\int\frac{dx}{x\cdot(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2}{3ax\sqrt{ax+bx^2}}-\frac{4b}{3a}\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$$

12) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}=\left(-\frac{1}{5ax^2}+\frac{2b}{5a^2x}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{ax+bx^2}}+\frac{8b^2}{5a^2}\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{1}{2}}}$$

13) $$\int\frac{dx}{x^3\cdot(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\left(-\frac{1}{7ax^3}+\frac{8b}{35a^2x^2}-\frac{16b^2}{35a^3x}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{ax+bx^2}}-\frac{64b^3}{35a^3}\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{1}{2}}}$$

T. XXX. $\int\frac{x^m\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}},\int\frac{dx}{x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}},\int\frac{x^m\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{7}{2}}},\int\frac{dx}{x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{7}{2}}}.$

1) $$\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\left(-\frac{2}{3(ax+bx^2)}+\frac{16b}{3a^2}\right)\cdot\frac{2bx+a}{a^2\sqrt{ax+bx^2}}$$

2) $$\int\frac{x\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\left(\frac{1}{a+bx}-\frac{4(2bx+a)}{a^2}\right)\cdot\frac{2}{3a\sqrt{ax+bx^2}}$$

3) $$\int\frac{x^2\cdot dx}{(ab+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\left(\frac{x}{a+bx}+\frac{2x}{a}\right)\cdot\frac{2}{3a\sqrt{ax+bx^2}}$$

4) $$\int\frac{x^3\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{2x^2}{3a(a+bx)\sqrt{ax+bx^2}}$$

---

5) $$\int\frac{dx}{x\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{2}{5ax(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{8b}{5a}\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$

6) $$\int\frac{dx}{x^2\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}=\left(-\frac{1}{7ax^2}+\frac{2b}{7a^2x}\right)\cdot\frac{2}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{16b^2}{7a^2}\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$

7) $$\int\frac{dx}{x^3\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$
$$=\left(-\frac{1}{9ax^3}+\frac{4b}{21a^2x^2}-\frac{8b^2}{21a^3x}\right)\cdot\frac{2}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{64b^3}{21a^3}\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}$$

---

8) $$\int\frac{dx}{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$=\frac{2(2bx+a)}{\sqrt{ax+bx^2}}\cdot S\left[(-1)^{\alpha+1}\cdot\frac{(n-3)^{\alpha|-2}\cdot(4b)^{\alpha}}{(n-2)^{\alpha+1|-2}\cdot a^{2\alpha+2}\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n-3-2\alpha}{2}}}\right]_{2\alpha+\beta=n-3}$$

9) $$\int\frac{x^m\cdot dx}{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$
$$=(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\alpha}\cdot\frac{(2m-n)^{\alpha|-2}\cdot a^{\alpha}}{(m-n+1)^{\alpha+1|-1}\cdot 2^{\alpha}\cdot b^{\alpha+1}}\cdot x^{m-\alpha-1}\right]_{\alpha+\beta=\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}\cdot\frac{(2m-n)^{\mu|-2}\cdot a^{\mu}}{(m-n+1)^{\mu|-1}\cdot 2^{\mu}\cdot b^{\mu}}\int\frac{x^{m-\mu}}{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}\cdot dx$$

10) $$\int\frac{dx}{x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}},$$
$$=(ax+bx^2)^{-\frac{n}{2}+1}\cdot S\left[(-1)^{\alpha+1}\cdot\frac{(m+n-2)^{\alpha|-1}\cdot 2^{\alpha+1}\cdot b^{\alpha}}{(2m+n-2)^{\alpha+1|-2}\cdot a^{\alpha+1}\cdot x^{m-\alpha}}\right]_{\alpha+\beta=\mu-1}$$
$$+(-1)^{\mu}\cdot\frac{(m+n-2)^{\mu|-1}\cdot 2^{\mu}\cdot b^{\mu}}{(2m+n-2)^{\mu|-2}\cdot a^{\mu}}\int\frac{dx}{x^{m-\mu}\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}$$

Tab. XXXI. $\int x^m \cdot \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx, \quad \int \frac{\sqrt{ax+bx^2}}{x^m} \cdot dx,$

$\int x^m (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx, \quad \int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x^m} \cdot dx.$

---

1) $$\int \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4b}\right) \cdot \sqrt{ax+bx^2} - \frac{a^2}{8b} \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

2) $$\int x \cdot \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx = \frac{(ax+bx^2)\sqrt{ax+bx^2}}{3b} - \frac{a}{2b} \int \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx$$

3) $$\int x^m \cdot \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx$$

$$= (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-1}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(2m+1)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}}}{(m+2)^{\mathfrak{a}+1|-1} \cdot 2^{\mathfrak{a}} \cdot b^{\mathfrak{a}+1}} \cdot x^{m-\mathfrak{a}-1}\right]$$

$$+ (-1)^m \cdot \frac{(2m+1)^{m|-2} \cdot a^m}{(m+2)^{m|-1} \cdot 2^m \cdot b^m} \int \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx$$

---

4) $$\int \frac{\sqrt{ax+bx^2}}{x} \cdot dx = \sqrt{ax+bx^2} + \tfrac{1}{2}a \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

5) $$\int \frac{\sqrt{ax+bx^2}}{x^m} \cdot dx$$

$$= (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=m-3}{S}\left[(-1)^{\mathfrak{a}+1} \cdot \frac{(m-3)^{\mathfrak{a}|-1} \cdot 2^{\mathfrak{a}+1} \cdot b^{\mathfrak{a}}}{(2m-3)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot a^{\mathfrak{a}+1} \cdot x^{m-\mathfrak{a}}}\right]$$

---

6) $$\int (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

$$= \left(\frac{ax+bx^2}{b} - \frac{3a^2}{b^2}\right) \cdot \frac{2bx+a}{8} \sqrt{ax+bx^2} + \frac{3a^4}{128b^2} \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

7) $$\int x \cdot (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{(ax+bx^2)^2 \sqrt{ax+bx^2}}{5b} - \frac{a}{2b} \int (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

8) $$\int x^2 \cdot (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\frac{x}{6b} - \frac{7a}{60b^2}\right) \cdot (ax+bx^2)^{\frac{5}{2}} + \frac{7a^2}{24b^2} \int (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

9) $$\int x^3 \cdot (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

$$= \left(\frac{x^2}{7b} - \frac{3ax}{28b^2} + \frac{3a^2}{40b^3}\right) \cdot (ax+bx^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{3a^3}{16b^3} \int (ax+bx^2)^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

---

10) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx = \frac{(ax+bx^2)\sqrt{ax+bx^2}}{3} + \tfrac{1}{2}a \int \sqrt{ax+bx^2} \cdot dx$$

11) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2} \cdot dx = \left(\frac{5a}{4} + \frac{bx}{2}\right) \cdot \sqrt{ax+bx^2} + \tfrac{3}{8}a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

12) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3} \cdot dx = \left(b - \frac{2a}{x}\right) \cdot \sqrt{ax+bx^2} + \tfrac{3}{2}ab \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

Tab. XXXII. $\int x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx,\quad \int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x^m}\cdot dx,$

$\int x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{7}{2}}\cdot dx,\quad \int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{7}{2}}}{x^m}\cdot dx.$

---

1) $$\int (ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx = \left(\frac{(ax+bx^2)^2}{b}-\frac{5a^2(ax+bx^2)}{16b^2}+\frac{15a^4}{128b^3}\right)\times \frac{2bx+a}{12}\sqrt{ax+bx^2}-\frac{5a^6}{1024b^3}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}$$

2) $$\int x\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx = \frac{(ax+bx^2)^3\cdot\sqrt{ax+bx^2}}{7b}-\frac{a}{2b}\int(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx$$

3) $$\int x^2\cdot(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx = \left(\frac{x}{8b}-\frac{9a}{112b^2}\right)(ax+bx^2)^{\frac{7}{2}}+\frac{9a^2}{32b^2}\int(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}\cdot dx$$

4) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x}\cdot dx = \frac{(ax+bx^2)^2\cdot\sqrt{ax+bx^2}}{5}+\tfrac{1}{2}a\int(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}\cdot dx$$

5) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x^2}\cdot dx$$
$$=\left(\frac{11a^2x}{24}+\frac{17abx^2}{24}+\frac{b^2x^3}{4}\right)\cdot\sqrt{ax+bx^2}+\frac{5a^2}{16}\int\sqrt{ax+bx^2}\cdot dx$$

6) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}{x^3}\cdot dx$$
$$=\left(\frac{11a^2}{8}+\frac{13abx}{12}+\frac{b^2x^2}{3}\right)\cdot\sqrt{ax+bx^2}+\frac{5a^3}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}}\cdot dx$$

7) $$\int (ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx = (2bx+a)\cdot \underset{\alpha+\beta=\mu-1}{S}\left[(-1)^\alpha\cdot\frac{n^{\alpha|-2}\cdot a^{2\alpha}\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-\alpha}}{(n+1)^{\alpha+1|-2}\cdot 2^{2\alpha+1}\cdot b^{\alpha+1}}\right]$$
$$+(-1)^\mu\cdot\frac{n^{\mu|-2}\cdot a^{2\mu}}{(n+1)^{\mu|-2}\cdot 2^{2\mu}\cdot b^\mu}\int(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}-\mu}\cdot dx$$

8) $$\int x^m\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx$$
$$=(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}\cdot \underset{\alpha+\beta=\mu-1}{S}\left[(-1)^\alpha\cdot\frac{(2m+n)^{\alpha|-2}\cdot a^\alpha\cdot x^{m-\alpha-1}}{(m+n+1)^{\alpha+1|-1}\cdot b^{\alpha+1}\cdot 2^\alpha}\right]$$
$$+(-1)^\mu\cdot\frac{(2m+n)^{\mu|-2}\cdot a^\mu}{(m+n+1)^{\mu|-1}\cdot b^\mu\cdot 2^\mu}\int x^{m-\mu}\cdot(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}\cdot dx$$

9) $$\int \frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^m}\cdot dx$$
$$=(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}+1}\cdot \underset{\alpha+\beta=\mu-1}{S}\left[(-1)^{\alpha+1}\cdot\frac{2^{\alpha+1}\cdot(m-n-2)^{\alpha|-1}\cdot b^\alpha}{(2m-n-2)^{\alpha+1|-2}\cdot a^{\alpha+1}\cdot x^{m-\alpha}}\right]$$
$$+(-1)^\mu\cdot\frac{2^\mu\cdot(m-n-2)^{\mu|-1}\cdot b^\mu}{(2m-n-2)^{\mu|-2}\cdot a^\mu}\int\frac{(ax+bx^2)^{\frac{n}{2}}}{x^{m-\mu}}\cdot dx$$

$$\int x^{m-1}.X^p.dx$$

$$\text{I.}\ \cdots = \frac{x^m.X^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}.X^{p-1}.dx - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}.X^{p-1}.dx$$

$$\text{II.}\ \cdots = \frac{x^{m-2n}.X^{p+1}}{(m+2pn)c} - \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c}\int x^{m-2n-1}.X^p.dx - \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c}\int x^{m-n-1}.X^p.dx$$

$$\text{III.}\ \cdots = \frac{x^m.X^p}{m+2pn} + \frac{2pna}{m+2pn}\int x^{m-1}.X^{p-1}.dx + \frac{pnb}{m+2pn}\int x^{m+n-1}.X^{p-1}.dx$$

$$\text{IV.}\ \cdots = \frac{x^m.X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}.X^p.dx - \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}.X^p.dx$$

$$\text{V.}\ \cdots = \frac{(2ac-b^2)x^m - bcx^{m+n}}{(p+1)(b^2-4ac)na}.X^{p+1} + \frac{1}{(p+1)(b^2-4ac)na}\int\Big([n(p+1)(b^2-4ac)-m(2ac-b^2)]x^{m-1} + (2pn+3n+m)bcx^{m+n-1}\Big).X^{p+1}.dx$$

---

a) Wenn $4ac-b^2>0$, $m<2n$, $k=\sqrt[2n]{a:c}$, $Cos\,\alpha = -b:2\sqrt{ac}$ ist:

$$1)\ \int\frac{x^m.dx}{a+bx^n+cx^{2n}} = \frac{1}{2nck^{2n-m-1}.Sin\,\alpha}\times$$

$$\times S\left\{\begin{array}{l} -Sin\,(n-m-1)\frac{2a\pi+\alpha}{n}.\log\left(x^2-2kx.Cos\frac{2a\pi+\alpha}{n}+k^2\right) \\ +2\,Cos\,(n-m-1)\frac{2a\pi+\alpha}{n}.\frac{1}{Tg}\frac{x\,Sin\frac{2a\pi+\alpha}{n}}{k-x.Cos\frac{2a\pi+\alpha}{n}} \end{array}\right\}$$
$$a+b=n-1$$

Ist $m>2n$, so wird man zuerst die ganzen Funktionen ausscheiden und die übrig bleibende ächt gebrochene Funktion noch integriren.

b) Wenn $4ac-b^2<0$, $\sqrt{b^2-4ac}=h$, $\frac{1}{2}(b-h)=f$, $\frac{1}{2}(b+h)=g$:

$$2)\ \int\frac{x^m.dx}{a+bx^n+cx^{2n}} = \frac{c}{h}\left[\int\frac{x^m.dx}{cx^n+f} - \int\frac{x^m.dx}{cx^n+g}\right]$$

T. XXXIV. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(a+bx^2+cx^4)^p}$, $\int \frac{dx}{x^m \cdot (a+bx^2+cx^4)^p}$, $a+bx^2+cx^4 = X$.

a) Wenn $b^2-4ac>0$, $\sqrt{b^2-4ac} = h$, $\frac{1}{2}(b-h) = f$, $\frac{1}{2}(b+h) = g$;

$$1)\ \int \frac{dx}{X} = \frac{c}{h}\left[\int \frac{dx}{cx^2+f} - \int \frac{dx}{cx^2+g}\right]$$

$$2)\ \int \frac{x \cdot dx}{X} = \frac{1}{2h} \cdot \log \frac{cx^2+f}{cx^2+g}$$

$$3)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{X} = \frac{g}{h}\int \frac{dx}{cx^2+g} - \frac{f}{h}\int \frac{dx}{cx^2+f}$$

$$4)\ \int \frac{x^3 \cdot dx}{X} = \frac{1}{2h}\left[g \cdot \log(cx^2+g) - f \cdot \log(cx^2+f)\right]$$

b) Wenn $b^2-4ac<0$, $\sqrt[4]{(a:c)} = f$ und $\cos\alpha = -b:2\sqrt{ac}$ ist;

$$1)\ \int \frac{dx}{X} = \frac{1}{4cf^3 \cdot \sin\alpha}\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{1}{2}\alpha \cdot \log \frac{x^2+2fx \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha + f^2}{x^2-2fx \cdot \cos\frac{1}{2}\alpha + f^2} \\ +2\cos\frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{1}{Tg}\,\frac{2fx \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha}{f^2-x^2}\end{array}\right\}$$

$$2)\ \int \frac{x \cdot dx}{X} = \frac{1}{2cf^2 \cdot \sin\alpha} \cdot \frac{1}{Tg}\,\frac{f^2 \cdot \sin\alpha}{f^2 \cdot \cos\alpha - x^2}$$

(Man sehe die vorhergehende Seite.)

Und allgemein, wenn $b^2-4ac \gtrless 0$ und $2(p-1)(b^2-4ac)a = k$ ist,

$$5)\ \int \frac{x^m \cdot dx}{X^p} = \frac{bcx^{m+3}+(b^2-2ac)x^{m+1}}{k \cdot X^{p-1}} + \frac{(4p-m-7)bc}{k}\int \frac{x^{m+2} \cdot dx}{X^{p-1}} + \frac{2(p-1)(b^2-4ac)+(m+1)(2ac-b^2)}{k}\int \frac{x^m \cdot dx}{X^{p-1}}$$

$$6)\ \int \frac{x^m \cdot dx}{X^p} = \frac{x^{m-3}}{(m-4p+1)c \cdot X^{p-1}} - \frac{(m-3)a}{(m-4p+1)c}\int \frac{x^{m-4} \cdot dx}{X^p} - \frac{(m-2p-1)b}{(m-4p+1)c}\int \frac{x^{m-2} \cdot dx}{X^p}$$

$$7)\ \int \frac{dx}{x^m \cdot X^p} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot X^{p-1}} - \frac{(m+2p-3)b}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-2} \cdot X^p} - \frac{m+4p-5}{(m-1)a}\int \frac{dx}{x^{m-4} \cdot X^p}$$

Tab. XXXV.

$$\int\frac{x^m}{X^p}\cdot dx,\ \int\frac{dx}{x^m\cdot X^p},\ \int x^m\cdot X^p\cdot dx,\ \int\frac{X^p}{x^m}\cdot dx,\quad \left.\begin{matrix}a+bx+cx^2=X\\ 4ac-b^2=k\end{matrix}\right].$$

1) $$\int\frac{x^m}{X^p}\cdot dx=\frac{x^{m-1}}{(m-2p+1)c\cdot X^{p-1}}-\frac{(m-1)a}{(m-2p+1)c}\int\frac{x^{m-2}}{X^p}\cdot dx-\frac{(m-p)b}{(m-2p+1)c}\int\frac{x^{m-1}}{X^p}\cdot dx$$

2) $$\int\frac{dx}{x^m\cdot X^p}=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}\cdot X^{p-1}}-\frac{(m+p-2)b}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}\cdot X^p}-\frac{(m+2p-3)c}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\cdot X^p}$$

3) $$\int x^m\cdot X^p\cdot dx=\frac{x^{m+1}\cdot X^p}{m+1}-\frac{pb}{m+1}\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx-\frac{2pc}{m+1}\int x^{m+2}\cdot X^{p-1}\cdot dx$$

4) $$\int x^m\cdot X^p\cdot dx=\frac{x^{m-1}\cdot X^{p+1}}{(m+2p+1)c}-\frac{(m-1)a}{(m+2p+1)c}\int x^{m-2}\cdot X^p\cdot dx-\frac{(m+p)b}{(m+2p+1)c}\int x^{m-1}\cdot X^p\cdot dx$$

5) $$\int x^m\cdot X^p\cdot dx=\frac{x^{m+1}\cdot X^p}{m+2p+1}+\frac{2pa}{m+2p+1}\int x^m\cdot X^{p-1}\cdot dx+\frac{pb}{m+2p+1}\int x^{m+1}\cdot X^{p-1}\cdot dx$$

6) $$\int\frac{X^p}{x^m}\cdot dx=-\frac{X^p}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{pb}{m-1}\int\frac{X^{p-1}}{x^{m-1}}\cdot dx+\frac{2pc}{m-1}\int\frac{X^{p-1}}{x^{m-2}}\cdot dx$$

7) $$\int\frac{X^p}{x^m}\cdot dx=-\frac{X^p}{(m-2p-1)x^{m-1}}-\frac{2pa}{m-2p-1}\int\frac{X^{p-1}}{x^m}\cdot dx-\frac{pb}{(m-2p-1)}\int\frac{X^{p-1}}{x^{m-1}}\cdot dx$$

8) $$\int\frac{X^p}{x^m}\cdot dx=-\frac{X^{p+1}}{(m-1)ax^{m-1}}-\frac{(m-p-2)b}{(m-1)a}\int\frac{X^p}{x^{m-1}}\cdot dx-\frac{(m-2p-3)c}{(m-1)a}\int\frac{X^p}{x^{m-2}}\cdot dx$$

9) $$\int\frac{dx}{X^p}=\frac{2cx+b}{(p-1)k\cdot X^{p-1}}+\frac{(2p-3)2c}{(p-1)k}\int\frac{dx}{X^{p-1}}$$

10) $$\int X^p\cdot dx=\frac{(2cx+b)\cdot X^p}{(2p+1)2c}+\frac{pk}{(2p+1)2c}\int X^{p-1}\cdot dx$$

1) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \frac{1}{Tg} \frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot log \frac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}}$$

2) $$\int \frac{x \cdot dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{2c} \cdot log(a+bx+cx^2) - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$

3) $$\int \frac{x^2 \cdot dx}{a+bx+cx^2} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2} \cdot log\, X + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right) \int \frac{dx}{a+bx+cx^2}$$

4) $$\int \frac{x^m \cdot dx}{a+bx+cx^2} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)c} - \frac{a}{c} \int \frac{x^{m-2} \cdot dx}{X} - \frac{b}{c} \int \frac{x^{m-1} \cdot dx}{X}$$

---

5) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{2cx+b}{(4ac-b^2)(a+bx+cx^2)} + \frac{2c}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{X}$$

6) $$\int \frac{x \cdot dx}{(a+bx+cx^2)^2} = -\frac{1}{2c(a+bx+cx^2)} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^2}$$

7) $$\int \frac{x^2 \cdot dx}{(a+bx+cx^2)^2} = -\frac{x}{c(a+bx+cx^2)} + \frac{a}{c} \int \frac{dx}{X^2}$$

8) $$\int \frac{x^m \cdot dx}{X^2} = \frac{x^{m-1}}{(m-3)cX} - \frac{(m-1)a}{(m-3)c} \int \frac{x^{m-2} \cdot dx}{X^2} - \frac{(m-2)b}{(m-3)c} \int \frac{x^{m-1} \cdot dx}{X^2}$$

---

9) $$\int \frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{2(4ac-b^2)X^2} + \frac{3c}{(4ac-b^2)^2 \cdot X}\right) \cdot (2cx+b) + \frac{6c^2}{4ac-b^2} \int \frac{dx}{X}$$

10) $$\int \frac{x \cdot dx}{X^3} = -\frac{1}{4cX^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^3}$$

Und allgemein

11) $$\int \frac{dx}{X^p} = (2cx+b) \cdot \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=n-1}{S}\left[\frac{(4p-6)^{\mathfrak{a}|-4} \cdot c^{\mathfrak{a}}}{(p-1)^{\mathfrak{a}+1|-1} \cdot (4ac-b^2)^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{p-\mathfrak{a}-1}}\right]$$
$$+ \frac{(4p-6)^{n|-4} \cdot c^n}{(p-1)^{n|-1} \cdot (4ac-b^2)^n} \int \frac{dx}{X^{p-n}}$$

1) $$\int \frac{dx}{x \cdot X} = \frac{1}{2a} \cdot \log \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$$

2) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{2a^2} \cdot \log \frac{x^2}{X} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right) \int \frac{dx}{X}$$

3) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot X} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^{m-1} \cdot X} - \frac{c}{a} \int \frac{dx}{x^{m-2} \cdot X}$$

---

4) $$\int \frac{dx}{x \cdot X^2} = \frac{1}{2aX} + \frac{1}{2a^2} \cdot \log \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^2} - \frac{b}{2a^2} \int \frac{dx}{X}$$

5) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot X^2} = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{X} - \frac{b}{a^3} \cdot \log \frac{x^2}{X} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right) \int \frac{dx}{X^2} + \frac{b^2}{a^3} \int \frac{dx}{X}$$

6) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot X^2} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot X} - \frac{mb}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-1} \cdot X^2} - \frac{(m+1)c}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-2} \cdot X^2}$$

---

7) $$\int \frac{dx}{x \cdot X^3} = \frac{1}{4aX^2} + \frac{1}{2a^2X} + \frac{1}{2a^3} \cdot \log \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^3} - \frac{b}{2a^2} \int \frac{dx}{X^2} - \frac{b}{2a^3} \int \frac{dx}{X}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^2 \cdot X^3} = -\frac{1}{ax \cdot X^2} - \frac{3b}{a} \int \frac{dx}{x \cdot X^3} - \frac{5c}{a} \int \frac{dx}{X^3}$$

9) $$\int \frac{dx}{x^m \cdot X^3} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1} \cdot X^2} - \frac{(m+1)b}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-1} \cdot X^3} - \frac{(m+3)c}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-2} \cdot X^3}$$

Tab. XXXVIII.

$$\int\frac{x^m\cdot dx}{\sqrt{X}},\ \int\frac{dx}{x^m\cdot\sqrt{X}},\ \int x^m\cdot X^{\frac{3}{2}}\cdot dx,\ \int\frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^m}\cdot dx,\quad \left[\begin{array}{r} a+bx+cx^2=X \\ 4ac-b^2=k \end{array}\right].$$

$$1)\ \int\frac{dx}{\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\cdot log(2cx+b+2\sqrt{c}\cdot\sqrt{X})=\frac{-1}{\sqrt{-c}}\cdot\frac{1}{Sin}\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$2)\ \int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{X}}=\frac{\sqrt{X}}{c}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$3)\ \int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{X}}=\left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{4c^2}\right)\cdot\sqrt{X}+\left(\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$4)\ \int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt{X}}=\left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{12c^2}+\frac{5b^2}{8c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)\cdot\sqrt{X}-\left(\frac{5b^3}{16c^3}-\frac{3ab}{4c^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$5)\ \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot log\frac{2a+bx-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{X}}{x}=\frac{1}{\sqrt{-a}}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{2a+bx}{2\sqrt{-a}\cdot\sqrt{X}}$$

$$6)\ \int\frac{dx}{x^2\cdot\sqrt{X}}=-\frac{\sqrt{X}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}$$

$$7)\ \int\frac{dx}{x^3\cdot\sqrt{X}}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{3b}{4a^2x}\right)\cdot\sqrt{X}+\left(\frac{3b^2}{8a^2}-\frac{c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}$$

$$8)\ \int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}}=\frac{2(2cx+b)}{k\cdot\sqrt{X}}$$

$$9)\ \int\frac{x\cdot dx}{X^{\frac{3}{2}}}=-\frac{2(2a+bx)}{k\cdot\sqrt{X}}$$

$$10)\ \int\frac{x^2\cdot dx}{X^{\frac{3}{2}}}=-\frac{(4ac-2b^2)x-2ab}{ck\sqrt{X}}+\frac{1}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$11)\ \int\frac{x^3\cdot dx}{X^{\frac{3}{2}}}=\frac{x^2}{c\sqrt{X}}-\frac{2a}{c}\int\frac{x\cdot dx}{X^{\frac{3}{2}}}-\frac{3b}{2c}\int\frac{x^2\cdot dx}{X^{\frac{3}{2}}}$$

$$12)\ \int\frac{dx}{x\cdot X^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a\sqrt{X}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}$$

$$13)\ \int\frac{dx}{x^2\cdot X^{\frac{3}{2}}}=\left(-\frac{1}{ax}-\frac{3b}{2a^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{X}}+\left(\frac{3b^2}{4a^2}-\frac{2c}{a}\right)\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}}-\frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}$$

Tab. XXXIX. $\int \frac{x^m}{X^{\frac{5}{2}}} \cdot dx, \quad \int \frac{dx}{x^m \cdot X^{\frac{5}{2}}}, \quad \left[\begin{array}{r} a+bx+cx^2 = X \\ 4ac-b^2 = k \end{array}\right]$;

$$1)\ \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right) \cdot \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$2)\ \int \frac{x \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3cX \cdot \sqrt{X}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$3)\ \int \frac{x^2 \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x}{2c} + \frac{b}{12c^2}\right) \cdot \frac{1}{X \cdot \sqrt{X}} + \left(\frac{b^2}{8c^2} + \frac{a}{2c}\right) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$4)\ \int \frac{x^3 \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x^2}{c} - \frac{bx}{4c^2} + \frac{b^2}{24c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right) \cdot \frac{1}{X \cdot \sqrt{X}} + \left(\frac{b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$5)\ \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3aX} + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} - \frac{b}{2a^2} \int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

$$6)\ \int \frac{dx}{x^2 \cdot X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{axX \cdot \sqrt{X}} - \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{5}{2}}} - \frac{4c}{a} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$7)\ \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}} \cdot \underset{\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu-1}{S} \left[\frac{(n-3)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot 4^{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{a}}}{(n-2)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot k^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{\frac{n-3-2\mathfrak{a}}{2}}}\right] + \frac{(n-3)^{\mu|-2} \cdot 4^{\mu} \cdot c^{\mu}}{(n-2)^{\mu|-2} \cdot k^{\mu}} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-\mu}}$$

$$8)\ \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{n}{2}}} = \underset{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n-3}{S} \left[\frac{1}{(n-2\mathfrak{a}-2)\, a^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{\frac{n-2-2\mathfrak{a}}{2}}}\right] - \frac{b}{2a} \cdot \underset{2\mathfrak{c}+\mathfrak{b} = n-3}{S} \left[\frac{1}{a^{\mathfrak{c}}} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-\mathfrak{c}}}\right] + \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

Tab. XXXX.

$$\int x^m\cdot\sqrt{X}\cdot dx,\ \int\frac{\sqrt{X}}{x^m}\cdot dx,\ \int x^m\cdot X^{\frac{3}{2}}\cdot dx,\ \int\frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^m}\cdot dx,\ \left[\begin{array}{r}a+bx+cx^2=X\\ 4ac-b^2=k\end{array}\right].$$

$$1)\quad \int\sqrt{X}\cdot dx = \frac{(2cx+b)\cdot\sqrt{X}}{4c}+\frac{k}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$2)\quad \int x\cdot\sqrt{X}\cdot dx = \frac{X\cdot\sqrt{X}}{3c}-\frac{b}{2c}\int\sqrt{X}\cdot dx$$

$$3)\quad \int x^2\cdot\sqrt{X}\cdot dx = \left(\frac{x}{4c}-\frac{5b}{24c^2}\right)\cdot X\cdot\sqrt{X}+\left(\frac{5b^2}{6c^2}-\frac{a}{4c}\right)\int\sqrt{X}\cdot dx$$

$$4)\quad \int x^3\cdot\sqrt{X}\cdot dx = \left(\frac{x^2}{5c}-\frac{7bx}{40c^2}+\frac{7b^2}{48c^3}-\frac{2a}{15c^2}\right)\cdot X^{\frac{3}{2}} -\left(\frac{7b^3}{32c^3}-\frac{3ab}{8c^2}\right)\int\sqrt{X}\cdot dx$$

$$5)\quad \int\frac{\sqrt{X}}{x}\cdot dx = \sqrt{X}+a\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$6)\quad \int\frac{\sqrt{X}}{x^2}\cdot dx = -\frac{\sqrt{X}}{x}+\tfrac{1}{2}b\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}+c\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$7)\quad \int\frac{\sqrt{X}}{x^3}\cdot dx = -\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{b}{4ax}\right)\cdot\sqrt{X}-\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{c}{2}\right)\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}$$

$$8)\quad \int X^{\frac{3}{2}}\cdot dx = \left(\frac{X}{8c}+\frac{3k}{64c^2}\right)\cdot(2cx+b)\sqrt{X}+\frac{3k^2}{128c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$9)\quad \int x\cdot X^{\frac{3}{2}}\cdot dx = \frac{X^2\cdot\sqrt{X}}{5c}-\frac{b}{2c}\int X^{\frac{3}{2}}\cdot dx$$

$$10)\quad \int x^2\cdot X^{\frac{3}{2}}\cdot dx = \left(\frac{x}{6c}-\frac{7b}{60c^2}\right)\cdot X^2\cdot\sqrt{X}+\left(\frac{7b^2}{24c^2}-\frac{a}{6c}\right)\int X^{\frac{3}{2}}\cdot dx$$

$$11)\quad \int\frac{X^{\frac{3}{2}}}{x}\cdot dx = \left(\frac{X}{3}+a\right)\cdot\sqrt{X}+a^2\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}+\frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{b}{2}\int\sqrt{X}\cdot dx$$

$$12)\quad \int\frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^2}\cdot dx = -\frac{X^2\cdot\sqrt{X}}{ax}+\frac{3b}{2a}\int\frac{X^{\frac{3}{2}}}{x}\cdot dx+\frac{4c}{a}\int X^{\frac{3}{2}}\cdot dx$$

$$1)\ \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \left(\frac{X^2}{12c}+\frac{5kX}{192c^2}+\frac{5k^2}{512c^3}\right)\cdot(2cx+b)\cdot\sqrt{X}+\frac{5k^3}{1024c^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$2)\ \int x \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \frac{X^3 \cdot \sqrt{X}}{7c} - \frac{b}{2c}\int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

$$3)\ \int x^2 \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \left(\frac{x}{8c}-\frac{9b}{112c^2}\right)\cdot X^3 \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{9b^2}{32c^2}-\frac{a}{8c}\right)\int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

$$4)\ \int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x} \cdot dx = \left(\frac{X^2}{5}+\frac{aX}{3}+a^2\right)\cdot\sqrt{X}+a^3\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}+\frac{a^2b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{ab}{2}\int\sqrt{X}\cdot dx+\frac{b}{2}\int X^{\frac{3}{2}}\cdot dx$$

$$5)\ \int \frac{X^{\frac{5}{2}} \cdot dx}{x^2} = -\frac{X^3 \cdot \sqrt{X}}{ax}+\frac{5b}{2a}\int\frac{X^{\frac{5}{2}}}{x}\cdot dx+\frac{6c}{a}\int X^{\frac{5}{2}}\cdot dx$$

$$6)\ \int X^{\frac{n}{2}} \cdot dx = (2cx+b)\cdot\sqrt{X}\cdot S\left[\frac{n^{\alpha|-2}\cdot k^{\alpha}\cdot X^{\frac{n-2\alpha-1}{2}}}{(n+1)^{\alpha+1|-2}\cdot 2^{2\alpha+1}\cdot c^{\alpha+1}}\right]_{\alpha+\beta=\mu-1} + \frac{n^{\mu|-2}\cdot k^{\mu}}{(n+1)^{\mu|-2}\cdot 2^{\mu}\cdot c^{\mu}}\int X^{\frac{n}{2}-\mu}\cdot dx$$

$$7)\ \int \frac{X^{\frac{n}{2}}}{x} \cdot dx = \sqrt{X}\cdot S\left[\frac{a^{\alpha}\cdot X^{\frac{n-1}{2}-\alpha}}{n-2\alpha}\right]_{2\alpha+\beta=n-1}+\frac{b}{2}\cdot S\left[a^{\alpha}\int X^{\frac{n}{2}-\gamma-1}\cdot dx\right]_{2\gamma-\delta=n-1} + a^{\frac{n+1}{2}}\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{X}}$$

Tab. XXXXII. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}, \left[\begin{matrix} a+bx+cx^2 = X \\ ag^2-bfg+cf^2 = k \end{matrix}\right].$

1) $$\int \frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot log\frac{2ag-bf+(bg-2cf)x\mp2\sqrt{k}\cdot\sqrt{X}}{f+gx}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{-k}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{2ag-bf+(bg-2cf)x}{2\sqrt{-k}\cdot\sqrt{X}}$$

2) $$\int \frac{x\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f}{g}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

3) $$\int \frac{x^2\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^2}{g^2}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

4) $$\int \frac{x^3\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^2}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^3}{g^3}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

5) $$\int \frac{x^4\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^3}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{x^2}{\sqrt{X}}\cdot dx + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f^3}{g^4}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^4}{g^4}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

6) $$\int \frac{x^5\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^4\cdot dx}{\sqrt{X}} - \frac{f}{g^2}\int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^3}{g^4}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^4}{g^5}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^5}{g^5}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

1) $\int Sin\,\varphi\cdot d\varphi = -Cos\,\varphi$

2) $\int Sin\,\varphi^2\cdot d\varphi = -\frac{1}{2}Sin\,\varphi\cdot Cos\,\varphi+\frac{1}{2}\varphi = -\frac{1}{4}Sin\,2\varphi+\frac{1}{2}\varphi$

3) $\int Sin\,\varphi^3\cdot d\varphi = (-\frac{1}{3}Sin\,\varphi^2-\frac{2}{3})\,Cos\,\varphi = \frac{1}{12}Cos\,3\varphi-\frac{3}{4}Cos\,\varphi$

4) $\int Sin\,\varphi^4\cdot d\varphi = (-\frac{1}{4}Sin\,\varphi^3-\frac{3}{8}Sin\,\varphi)\,Cos\,\varphi+\frac{3}{8}\varphi$
$= \frac{1}{32}Sin\,4\varphi-\frac{1}{4}Sin\,2\varphi+\frac{3}{8}\varphi$

5) $\int Sin\,\varphi^5\cdot d\varphi = (-\frac{1}{5}Sin\,\varphi^4-\frac{4}{15}Sin\,\varphi^2-\frac{8}{15})\,Cos\,\varphi$
$= -\frac{1}{80}Cos\,5\varphi+\frac{5}{48}Cos\,3\varphi-\frac{5}{8}Cos\,\varphi$

6) $\int Sin\,\varphi^{2m}\cdot d\varphi$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\cdot S\left[(-1)^{b+1}\cdot(2m)_a\cdot\frac{1}{(m-a)}\cdot Sin\,2(m-a)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,m-1}+\frac{(2m)^{m|-1}}{2^{2m}\cdot m!}\cdot\varphi$$

7) $\int Sin\,\varphi^{2m+1}\cdot d\varphi$

$$= \frac{1}{2^{2m}}\cdot S\left[(-1)^{b+1}\cdot(2m+1)_a\cdot\frac{1}{2m-2a+1}\cdot Cos\,(2m-2a+1)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,m}$$

---

1) $\int Cos\,\varphi\cdot d\varphi = Sin\,\varphi$

2) $\int Cos\,\varphi^2\cdot d\varphi = \frac{1}{2}Sin\,\varphi\cdot Cos\,\varphi+\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4}Sin\,2\varphi+\frac{1}{2}\varphi$

3) $\int Cos\,\varphi^3\cdot d\varphi = (\frac{1}{3}Cos\,\varphi^2+\frac{2}{3})\,Sin\,\varphi = \frac{1}{12}Siu\,3\varphi+\frac{3}{4}Sin\,\varphi$

4) $\int Cos\,\varphi^4\cdot d\varphi = (\frac{1}{4}Cos\,\varphi^3+\frac{3}{8}Cos\,\varphi)\,Sin\,\varphi+\frac{3}{8}\varphi$
$= \frac{1}{32}Sin\,4\varphi+\frac{1}{4}Sin\,2\varphi+\frac{3}{8}\varphi$

5) $\int Cos\,\varphi^5\cdot d\varphi = (\frac{1}{5}Cos\,\varphi^4+\frac{4}{15}Cos\,\varphi^2+\frac{8}{15})\,Sin\,\varphi$
$= \frac{1}{80}Sin\,5\varphi+\frac{5}{48}Sin\,3\varphi+\frac{5}{8}Sin\,\varphi$

6) $$\int Cos\,\varphi^{2n}\cdot d\varphi = \frac{1}{2^{2n}}\cdot S\left[(2n)_a\cdot\frac{1}{n-a}\cdot Sin\,2(n-a)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,n-1}+\frac{(2n)^{n|-1}}{2^{2n}\cdot n!}\cdot\varphi$$

7) $$\int Cos\,\varphi^{2n+1}\cdot d\varphi = \frac{1}{2^{2n}}\cdot S\left[(2n+1)_a\cdot\frac{1}{2n-2a+1}\cdot Sin\,(2n-2a+1)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,n}$$

Tab. XXXXV.

$$\int Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi, \quad \int Sin\,\varphi^{n} \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi, \quad \int Sin\,\varphi^{m} \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi.$$

---

1) $$\int Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi = -\frac{1}{n+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}$$

2) $$\int Sin\,\varphi^{n} \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{n+1} \cdot Sin\,\varphi^{n+1}$$

---

3) $$\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{2} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{4} Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi - \tfrac{1}{8} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \tfrac{1}{8}\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{4} Sin\,4\varphi - \varphi)$$

4) $$\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{3} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{5} Cos\,\varphi^{2} + \tfrac{2}{15}) Sin\,\varphi^{3}$$
$$= -\tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5} Sin\,5\varphi + \tfrac{1}{3} Sin\,3\varphi - 2\,Sin\,\varphi)$$

5) $$\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{4} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{6} Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{3} + \tfrac{1}{2}\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{2}\,d\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{32}(\tfrac{1}{6} Sin\,6\varphi + \tfrac{1}{2} Sin\,4\varphi - \tfrac{1}{2} Sin\,2\varphi - 2\varphi)$$

---

6) $$\int Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{2} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{5} Sin\,\varphi^{4} - \tfrac{1}{15} Sin\,\varphi^{2} - \tfrac{2}{15}) Cos\,\varphi$$
$$= \tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5} Cos\,5\varphi - \tfrac{1}{3} Cos\,3\varphi - 2\,Cos\,\varphi)$$

7) $$\int Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{3} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{6} Cos\,\varphi^{2} + \tfrac{1}{12}) Sin\,\varphi^{4}$$
$$= \tfrac{1}{32}(\tfrac{1}{6} Cos\,6\varphi - \tfrac{3}{2} Cos\,2\varphi)$$

8) $$\int Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{4} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{64}(\tfrac{1}{7} Cos\,7\varphi + \tfrac{1}{5} Cos\,5\varphi - Cos\,3\varphi - 3\,Cos\,\varphi)$$

---

9) $$\int Sin\,\varphi^{4} \cdot Cos\,\varphi^{2} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{6} Sin\,\varphi^{5} - \tfrac{1}{24} Sin\,\varphi^{3} - \tfrac{1}{16} Sin\,\varphi) Cos\,\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi$$
$$= \tfrac{1}{32}(\tfrac{1}{6} Sin\,6\varphi - \tfrac{1}{2} Sin\,4\varphi - \tfrac{1}{2} Sin\,2\varphi + 2\varphi$$

10) $$\int Sin\,\varphi^{4} \cdot Cos\,\varphi^{3} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{7} Cos\,\varphi^{2} + \tfrac{2}{35}) Sin\,\varphi^{5}$$
$$= \tfrac{1}{64}(\tfrac{1}{7} Sin\,7\varphi - \tfrac{1}{5} Sin\,5\varphi - Sin\,3\varphi + 3\,Sin\,\varphi)$$

11) $$\int Sin\,\varphi^{4} \cdot Cos\,\varphi^{4} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{128}(\tfrac{1}{8} Sin\,8\varphi - Sin\,4\varphi + 3\varphi)$$

Tab. XXXXVI. $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^n}$, $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^n}$, $\int \frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi}\cdot d\varphi$, $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi}\cdot d\varphi$.

1) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log Tg\,\tfrac{1}{2}\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2} = -\,Cotg\,\varphi$

3) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^3} = -\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

4) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^4} = Cotg\,\varphi - \tfrac{1}{3}\,Cotg\,\varphi^3$

5) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^5} = \left(-\frac{1}{4\sin\varphi^4} - \frac{3}{8\sin\varphi^2}\right)\cdot\cos\varphi + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

6) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^6} = \left(-\frac{1}{5\sin\varphi^5} - \frac{4}{15\sin\varphi^3} - \frac{8}{15\sin\varphi}\right)\cdot\cos\varphi$

---

7) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \log Tg\left(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi\right)$

8) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} = Tg\,\varphi$

9) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

10) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^4} = Tg\,\varphi + \tfrac{1}{3}\,Tg\,\varphi^3$

11) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^5} = \left(\frac{1}{4\cos\varphi^4} + \frac{3}{8\cos\varphi^2}\right)\cdot\sin\varphi + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

12) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^6} = \left(\frac{1}{5\cos\varphi^5} + \frac{4}{15\cos\varphi^3} + \frac{8}{15\cos\varphi}\right)\cdot\sin\varphi$

---

13) $\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot d\varphi = -\log\cos\varphi = \log Sec\,\varphi$

14) $\int \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi}\cdot d\varphi = -\sin\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

15) $\int \frac{\sin\varphi^3}{\cos\varphi}\cdot d\varphi = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi^2 + \int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot d\varphi$

16) $\int \frac{\sin\varphi^4}{\cos\varphi}\cdot d\varphi = -\tfrac{1}{3}\sin\varphi^3 - \sin\varphi + \int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

17) $\int \frac{\sin\varphi^5}{\cos\varphi}\cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4}\sin\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\sin\varphi^2 + \int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot d\varphi$

---

18) $\int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot d\varphi = \log\sin\varphi$

19) $\int \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi}\cdot d\varphi = \cos\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

20) $\int \frac{\cos\varphi^3}{\sin\varphi}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{2}\cos\varphi^2 + \int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot d\varphi$

21) $\int \frac{\cos\varphi^4}{\sin\varphi}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{3}\cos\varphi^3 + \cos\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

22) $\int \frac{\cos\varphi^5}{\sin\varphi}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}\cos\varphi^4 + \tfrac{1}{2}\cos\varphi^2 + \int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\cdot d\varphi$

Tab. XLVII. $\int \frac{Sin\,\varphi^m}{Cos\,\varphi^n}\cdot d\varphi.$

$$1)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi} - \varphi = Tg\,\varphi - \varphi$$

$$2)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^2 + 2)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi} = Cos\,\varphi + Sec\,\varphi$$

$$3)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{2}Sin\,\varphi^3 + \tfrac{3}{2}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi} - \tfrac{3}{2}\varphi$$

$$4)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{3}Sin\,\varphi^4 - \tfrac{4}{3}Sin\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3})\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi}$$

$$5)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi}{2\,Cos\,\varphi^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$6)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} + log\,Cos\,\varphi$$

$$7)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^3 + \tfrac{3}{2}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^2} - \tfrac{3}{2}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$8)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{2}Sin\,\varphi^4 + 1)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^2} + 2\,log\,Cos\,\varphi$$

$$9)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi^3}{3\,Cos\,\varphi^3} = \tfrac{1}{3}Tg\,\varphi^3$$

$$10)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = (Sin\,\varphi^2 - \tfrac{2}{3})\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^3}$$

$$11)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{3}Tg\,\varphi^3 - Tg\,\varphi + \varphi$$

$$12)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^4 + 4\,Sin\,\varphi^2 - \tfrac{8}{3})\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^3}$$

$$13)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = (\tfrac{1}{8}Sin\,\varphi^3 + \tfrac{1}{8}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^4} - \tfrac{1}{8}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$14)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}Tg\,\varphi^4$$

$$15)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = (\tfrac{5}{8}Sin\,\varphi^3 - \tfrac{3}{8}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^4} + \tfrac{3}{8}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$16)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}Tg\,\varphi^4 - \tfrac{1}{2}Tg\,\varphi^2 - log\,Cos\,\varphi.$$

Tab. XLVIII. $\int \frac{Cos\,\varphi^n}{Sin\,\varphi^m} \cdot d\varphi.$

1) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = -Cotg\,\varphi - \varphi$

2) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = \frac{Cos\,\varphi^2 - 2}{Sin\,\varphi} = -Sin\,\varphi - Cosec\,\varphi$

3) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (\frac{1}{2} Cos\,\varphi^3 - \frac{3}{2} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi} - \frac{3}{2}\varphi$

4) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (\frac{1}{3} Cos\,\varphi^4 + \frac{4}{3} Cos\,\varphi^2 - \frac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi}$

---

5) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = -\frac{Cos\,\varphi}{2\,Sin\,\varphi^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

6) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = -\frac{1}{2\,Sin\,\varphi^2} - log\,Sin\,\varphi$

7) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (Cos\,\varphi^3 - \frac{3}{2} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} - \frac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

8) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (\frac{1}{2} Cos\,\varphi^4 - 1) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} - 2\,log\,Sin\,\varphi$

---

9) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = -\frac{1}{3} Cotg\,\varphi^3$

10) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (-Cos\,\varphi^2 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^3}$

11) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = -\frac{1}{3} Cotg\,\varphi^3 + Cotg\,\varphi + \varphi$

12) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (Cos\,\varphi^4 - 4\,Cos\,\varphi^2 + \frac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^3}$

---

13) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (-\frac{1}{4} Cos\,\varphi^3 - \frac{1}{8} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^4} - \frac{1}{8} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

14) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = -\frac{Cos\,\varphi^4}{4\,Sin\,\varphi^4} = -\frac{1}{4} Cotg\,\varphi^4$

15) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (-\frac{5}{8} Cos\,\varphi^3 + \frac{3}{8} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^4} + \frac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

16) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = -\frac{1}{4} Cotg\,\varphi^4 + \frac{1}{2} Cotg\,\varphi^2 + log\,Sin\,\varphi$

Tab. XLIX. $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n}$.

1) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi} = log\,Tg\,\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^2} = \frac{1}{Cos\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

3) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^3} = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} + log\,Tg\,\varphi$

4) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^4} = \frac{1}{3\,Cos\,\varphi^3} + \frac{1}{Cos\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

---

5) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{Sin\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

6) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^2} = -2\,Cotg\,2\varphi$

7) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^3} = \left(\frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi} + \frac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

8) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^4} = \frac{1}{3\,Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^3} - \frac{8}{3}\,Cotg\,2\varphi$

---

9) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{2\,Sin\,\varphi^2} + log\,Tg\,\varphi$

10) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^2} = \frac{1}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi} + 3 \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3}$

11) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^3} = -\frac{2\,Cos\,2\varphi}{Sin\,2\varphi^2} + 2\,log\,Tg\,\varphi$

12) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^4} = \left(\frac{1}{3\,Cos\,\varphi^3} + \frac{5}{3\,Cos\,\varphi}\right) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} + 5 \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3}$

---

13) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{3\,Sin\,\varphi^3} - \frac{1}{Sin\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

14) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^2} = -\frac{1}{3\,Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^3} - \frac{8}{3}\,Cotg\,2\varphi =$

15) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^3} = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2 \cdot Sin\,\varphi^3} + \frac{5}{2} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi}$

16) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^4} = \left(-\frac{8}{3\,Sin\,2\varphi^3} - \frac{16}{3\,Sin\,2\varphi}\right) \cdot Cos\,2\varphi$

Tab. L. $\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi$, $\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi^m \cdot d\varphi$, so wie $\int X \cdot arc \cdot sin \cdot tg \cdot x \cdot dx$.

---

1) $\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi$

$$= S\left[(-1)^{a+1} \cdot n^{2a|-1} \cdot \varphi^{n-2a}\right]_{2a+b=n} \cdot Cos\,\varphi + S\left[(-1)^{a} \cdot n^{2a+1|-1} \cdot \varphi^{n-2a-1}\right]_{2a+b=n-1} \cdot Sin\,\varphi$$

2) $\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi$

$$= S\left[(-1)^{a} \cdot n^{2a|-1} \cdot \varphi^{n-2a}\right]_{2a+b=n} \cdot Sin\,\varphi + S\left[(-1)^{a} \cdot n^{2a+1|-1} \cdot \varphi^{n-2a-1}\right]_{2a+b=n-1} \cdot Cos\,\varphi$$

3) $$\int \varphi \cdot Sin\,\varphi^n \cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi^n}{n^2} - \frac{\varphi \cdot Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^n}{n} + \frac{n-1}{n}\int \varphi \cdot Sin\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi$$

4) $$\int \varphi \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi = \frac{Cos\,\varphi^n}{n^2} + \frac{\varphi \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^n}{n} + \frac{n-1}{n}\int \varphi \cdot Cos\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi$$

5) $$\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi = -\frac{\varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^{m-1}}{m} + \frac{n\varphi^{n-1} \cdot Sin\,\varphi^m}{m^2}$$
$$+ \frac{m-1}{m}\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi^{m-2} \cdot d\varphi - \frac{n(n-1)}{m^2}\int \varphi^{n-2} \cdot Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi$$

6) $$\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi^m \cdot d\varphi = \frac{\varphi^n \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^{m-1}}{m} + \frac{n\varphi^{n-1} \cdot Cos\,\varphi^m}{m^2}$$
$$+ \frac{m-1}{m}\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi^{m-2} \cdot d\varphi - \frac{n(n-1)}{m^2}\int \varphi^{n-2} \cdot Cos\,\varphi^m \cdot d\varphi$$

---

7) $$\int X \cdot \frac{1}{Sin} x \cdot dx = \frac{1}{Sin} x \cdot \int X \cdot dx - \int \frac{\int X \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

8) $$\int X \cdot \frac{1}{Cos} x \cdot dx = \frac{1}{Cos} x \cdot \int X \cdot dx + \int \frac{\int X \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

9) $$\int X \cdot \frac{1}{Tg} x \cdot dx = \frac{1}{Tg} x \cdot \int X \cdot dx - \int \frac{\int X \cdot dx}{1+x^2} \cdot dx$$

10) $$\int X \cdot \frac{1}{Cotg} x \cdot dx = \frac{1}{Cotg} x \cdot \int X \cdot dx + \int \frac{\int X \cdot dx}{1+x^2} \cdot dx$$

wo X eine beliebige Funktion von x seyn kann, gewöhnlich aber als eine algebraische Funktion von x gedacht wird.

Diese Formeln können zunächst angewandt werden auf die Integration von $\frac{1}{Sin} x \cdot dx$, $x^m \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{x^m}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{x^m}{(1+x^2)^n} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $a^x \cdot \frac{1}{Sin} x$, $x^m \cdot a^x \cdot \frac{1}{Sin} x$, und von denselben Formen, wenn $\frac{1}{Cos} x$, $\frac{1}{Tg} x$, $\frac{1}{Cotg} x$ statt $\frac{1}{Sin} x$ gesetzt wird; u. s. w.

1) $\int f_x \cdot \log \varphi_x \cdot dx = \log \varphi_x \cdot \int f_x \cdot dx - \int \frac{\int f_x \cdot dx}{\varphi_x} \cdot d\varphi_x$

Diese Formel kann zunächst angewandt werden auf die Integration von $\varphi_x \cdot \log x \cdot dx$, $x^m \cdot \log x \cdot dx$, $a^x \cdot \log x \cdot dx$, $(a+bx)^m \cdot \log x \cdot dx$, $\frac{\log x}{x} \cdot dx$, $\frac{\log x}{a+b} \cdot dx$ ꝛc. ꝛc. ꝛc. — Und sie gibt auch

2) $\int X \cdot \log x^n \cdot dx$

$$= S\left[(-1)^a \cdot n^{a|-1} \cdot X_{a+1} \cdot \log x^{n-a}\right]_{a+b=\mu-1} + (-1)^\mu \cdot n^{\mu|-1} \int \frac{X_\mu \cdot \log x^{n-\mu} \cdot dx}{x},$$

wenn $X_1 = \int X \cdot dx$, dagegen $X_{b+2} = \int \frac{X_{b+1}}{x} \cdot dx$ ist.

Diese Formel (2.) läßt sich zunächst anwenden auf die Integration von $x^m \cdot \log x^n \cdot dx$, $x^{-1} \cdot \log x^n \cdot dx$, $\frac{x^m}{\sqrt{\log x}} \cdot dx$, $\frac{x^m}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} \cdot dx$ ꝛc. ꝛc. ꝛc.

3) $\int \frac{X}{\log x^n} \cdot dx = -S\left[\frac{X_a \cdot x}{(n-1)^{a+1|-1} \cdot \log x^{n-a-1}}\right]_{a+b=\mu-1} + \frac{1}{(n-1)^{\mu|-1}} \int \frac{X_\mu}{\log x^{n-\mu}} \cdot dx$

wenn $X_0 = X$ und $X_{a+1} = \frac{d(X_a \cdot x)}{dx}$ genommen wird.

Diese Formel kann aber zunächst gebraucht werden zur Integration von $\frac{x^m}{\log x^n} \cdot dx$, $\frac{1}{x \cdot \log x^n} \cdot dx$, $\frac{1}{\log x} \cdot dx$, $\frac{1}{\log \frac{1}{x}} \cdot dx$ ꝛc. ꝛc.

4) $\int \frac{\log x^n}{x} \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot \log x^{n+1}$

5) $\int \frac{x^m \cdot dx}{\log x} = \int \frac{dy}{\log y}$, wenn $x^{m+1} = y$.

Tab. LII.

$$\int a^x \cdot X \cdot dx, \int e^{ax} \cdot Sin\, x^n \cdot dx, \int e^{ax} \cdot Cos\, x^n \cdot dx, \int \frac{f + g \cdot Cos\, \varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n} \cdot dx.$$

1) $$\int a^x \cdot X \cdot dx = S\left[(-1)^a \cdot \frac{a^x \cdot X_a}{(log\, a)^{a+1}}\right]_{a+b=\mu-1} + (-1)^\mu \cdot \frac{1}{(log\, a)^\mu} \int a^x \cdot X_\mu \cdot dx,$$

wenn $X_0 = X$ aber $X_{a+1} = \frac{dX_a}{dx}$ ist.

2) $$\int a^x \cdot X \cdot dx = S\left[(-1)^a \cdot a^x \cdot X_{a+1} \cdot log\, a^a\right]_{a+b=\mu-1} + (-1)^\mu \cdot (log\, a)^\mu \int a^x \cdot X_{\mu+1} \cdot dx,$$

wenn $X_{a+1} = \int X_a \cdot dx$ und $X_0 = X$ genommen wird.

Anwendbar zunächst auf die Integration von

$a^x \cdot x^n \cdot dx$, $\frac{a^x}{x^n} \cdot dx$, $\frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx$, $\frac{a^x}{1-x} \cdot dx$, $a^{mx} \cdot x^n \cdot dx$,

$x^{nx} \cdot x^m \cdot dx$ ꝛc. ꝛc. ꝛc.

3) $$\int e^{ax} \cdot Sin\, x^n \cdot dx = \frac{e^{ax} \cdot Sin\, x^{n-1} \cdot (a \cdot Sin\, x - n \cdot Cos\, x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot Sin\, x^{n-2} \cdot dx$$

4) $$\int e^{ax} \cdot Cos\, x^n \cdot dx = \frac{e^{ax} \cdot Cos\, x^{n-1} \cdot (a \cdot Cos\, x + n \cdot Sin\, x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot Cos\, x^{n-2} \cdot dx.$$

Diese beiden Formeln kann man auch leicht brauchbar machen, für den Fall, daß $Sin\,(px + q)$, $Cos\,(px + q)$, statt $Sin\, x$, $Cos\, x$, stehen sollte; $px + q = z$ setzend.

5) $$\int \frac{f + g \cdot Cos\, \varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n} \cdot d\varphi = \frac{(ag - bf) \cdot Sin\, \varphi}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b \cdot Cos\, \varphi)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2)} \int \frac{(n-1)(af - bg) + (n-2)(ag - bf) \cdot Cos\, \varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^{n-1}} \cdot d\varphi.$$

Zunächst anwendbar auf die Integration von

$\frac{d\varphi}{a + b \cdot Cos\, \varphi}$, $\frac{d\varphi}{1 + Cos\, \varphi}$, $\frac{Sin\, \varphi}{a + b \cdot Cos\, \varphi} \cdot d\varphi$, $\frac{Cos\, \varphi}{a + b \cdot Cos\, \varphi} \cdot d\varphi$,

$\frac{d\varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n}$, $\frac{Cos\, \varphi \cdot d\varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n}$ u. s. w. f.

Tab. XXXIX. $\int \frac{x^m}{X^{\frac{5}{2}}} \cdot dx, \quad \int \frac{dx}{x^m \cdot X^{\frac{5}{2}}}, \qquad \left.\begin{array}{r} a+bx+cx^2 = X \\ 4ac-b^2 = k \end{array}\right]$:

$$1) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right) \cdot \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$2) \int \frac{x \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3cX \cdot \sqrt{X}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$3) \int \frac{x^2 \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x}{2c} + \frac{b}{12c^2}\right) \cdot \frac{1}{X \cdot \sqrt{X}} + \left(\frac{b^2}{8c^2} + \frac{a}{2c}\right) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$4) \int \frac{x^3 \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x^2}{c} - \frac{bx}{4c^2} + \frac{b^2}{24c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right) \cdot \frac{1}{X \cdot \sqrt{X}} + \left(\frac{b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$5) \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3aX} + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} - \frac{b}{2a^2} \int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

$$6) \int \frac{dx}{x^2 \cdot X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{axX \cdot \sqrt{X}} - \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{5}{2}}} - \frac{4c}{a} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$7) \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}} \cdot S\left[\frac{(n-3)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot 4^{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{a}}}{(n-2)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot k^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{\frac{n-3-2\mathfrak{a}}{2}}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu-1} + \frac{(n-3)^{\mu|-2} \cdot 4^{\mu} \cdot c^{\mu}}{(n-2)^{\mu|-2} \cdot k^{\mu}} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-\mu}}$$

$$8) \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{n}{2}}} = S\left[\frac{1}{(n-2\mathfrak{a}-2)\, a^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{\frac{n-2-2\mathfrak{a}}{2}}}\right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n-3} - \frac{b}{2a} \cdot S\left[\frac{1}{a^{\mathfrak{c}}} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-\mathfrak{c}}}\right]_{2\mathfrak{c}+\mathfrak{d} = n-3} + \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

Tab. XXXX.

$$\int x^m \cdot \sqrt{X} \cdot dx, \quad \int \frac{\sqrt{X}}{x^m} \cdot dx, \quad \int x^m \cdot X^{\frac{3}{2}} \cdot dx, \quad \int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^m} \cdot dx, \quad \left.\begin{matrix} a+bx+cx^2=X \\ 4ac-b^2=k \end{matrix}\right].$$

---

1) $$\int \sqrt{X} \cdot dx = \frac{(2cx+b)\cdot\sqrt{X}}{4c} + \frac{k}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

2) $$\int x \cdot \sqrt{X} \cdot dx = \frac{X \cdot \sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{X} \cdot dx$$

3) $$\int x^2 \cdot \sqrt{X} \cdot dx = \left(\frac{x}{4c} - \frac{5b}{24c^2}\right) \cdot X \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{5b^2}{6c^2} - \frac{a}{4c}\right)\int \sqrt{X} \cdot dx$$

4) $$\int x^3 \cdot \sqrt{X} \cdot dx = \left(\frac{x^2}{5c} - \frac{7bx}{40c^2} + \frac{7b^2}{48c^3} - \frac{2a}{15c^2}\right) \cdot X^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{7b^3}{32c^3} - \frac{3ab}{8c^2}\right)\int \sqrt{X} \cdot dx$$

---

5) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x} \cdot dx = \sqrt{X} + a\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

6) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x^2} \cdot dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \tfrac{1}{2}b\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + c\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

7) $$\int \frac{\sqrt{X}}{x^3} \cdot dx = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right) \cdot \sqrt{X} - \left(\frac{b^2}{8a} - \frac{c}{2}\right)\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

---

8) $$\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\frac{X}{8c} + \frac{3k}{64c^2}\right) \cdot (2cx+b)\sqrt{X} + \frac{3k^2}{128c^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

9) $$\int x \cdot X^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{X^2 \cdot \sqrt{X}}{5c} - \frac{b}{2c}\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

10) $$\int x^2 \cdot X^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\frac{x}{6c} - \frac{7b}{60c^2}\right) \cdot X^2 \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right)\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

---

11) $$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx = \left(\frac{X}{3} + a\right) \cdot \sqrt{X} + a^2\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + \frac{ab}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \sqrt{X} \cdot dx$$

12) $$\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^2} \cdot dx = -\frac{X^2 \cdot \sqrt{X}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx + \frac{4c}{a}\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

Tab. XXXXI. $\int x^m \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx, \quad \int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x^m} \cdot dx, \quad \left. \begin{matrix} a+bx+cx^2 = X \\ 4ac-b^2 = k \end{matrix} \right]$.

$$1) \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \left(\frac{X^2}{12c} + \frac{5kX}{192c^2} + \frac{5k^2}{512c^3}\right) \cdot (2cx+b) \cdot \sqrt{X} + \frac{5k^3}{1024c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$2) \int x \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \frac{X^3 \cdot \sqrt{X}}{7c} - \frac{b}{2c} \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

$$3) \int x^2 \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \left(\frac{x}{8c} - \frac{9b}{112c^2}\right) \cdot X^3 \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{9b^2}{32c^2} - \frac{a}{8c}\right) \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

$$4) \int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x} \cdot dx = \left(\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right) \cdot \sqrt{X} + a^3 \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + \frac{a^2 b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{ab}{2} \int \sqrt{X} \cdot dx + \frac{b}{2} \int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

$$5) \int \frac{X^{\frac{5}{2}} \cdot dx}{x^2} = -\frac{X^2 \cdot \sqrt{X}}{ax} + \frac{5b}{2a} \int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x} \cdot dx + \frac{6c}{a} \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

$$6) \int X^{\frac{n}{2}} \cdot dx = (2cx+b) \cdot \sqrt{X} \cdot S\left[\frac{n^{a|-2} \cdot k^a \cdot X^{\frac{n-2a-1}{2}}}{(n+1)^{a+1|-2} \cdot 2^{2a+1} \cdot c^{a+1}}\right]_{a+b=n-1} + \frac{n^{n|-2} \cdot k^n}{(n+1)^{n|-2} \cdot 2^n \cdot c^n} \int X^{\frac{n}{2}-n} \cdot dx$$

$$7) \int \frac{X^{\frac{n}{2}}}{x} \cdot dx = \sqrt{X} \cdot S\left[\frac{a^a \cdot X^{\frac{n-1}{2}-a}}{n-2a}\right]_{2a+b=n-1} + \frac{b}{2} \cdot S\left[a^a \int X^{\frac{n}{2}-c-1} \cdot dx\right]_{2c+b=n-1} + a^{\frac{n+1}{2}} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

Tab. XXXXII. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\left[\begin{array}{l} a+bx+cx^2 = X \\ ag^2-bfg+cf^2 = k \end{array}\right]$.

1) $$\int \frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot log\,\frac{2ag-bf+(bg-2cf)x\mp 2\sqrt{k}\cdot\sqrt{X}}{f+gx}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{-k}}\cdot\frac{1}{Tg}\,\frac{2ag-bf+(bg-2cf)x}{2\sqrt{-k}\cdot\sqrt{X}}$$

2) $$\int \frac{x\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f}{g}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

3) $$\int \frac{x^2\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^2}{g^2}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

4) $$\int \frac{x^3\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^2}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^3}{g^3}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

5) $$\int \frac{x^4\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^3}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{x^2}{\sqrt{X}}\cdot dx + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f^3}{g^4}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^4}{g^4}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

6) $$\int \frac{x^5\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^4\cdot dx}{\sqrt{X}} - \frac{f}{g^2}\int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^3}{g^4}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^4}{g^5}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^5}{g^5}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

$$\int Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n \cdot dx$$

$$= \frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m-1}\int Sin\,\varphi^{m+2} \cdot Cos\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{I.}$$

$$= -\frac{Sin\,\varphi^{m-1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int Sin\,\varphi^{m-2} \cdot Cos\,\varphi^{n+2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{II.}$$

$$= -\frac{Sin\,\varphi^{m-1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int Sin\,\varphi^{m-2} \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{III.}$$

$$= \frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int Sin\,\varphi^{m} \cdot Cos\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{IV.}$$

$$= \frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int Sin\,\varphi^{m+2} \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{V.}$$

$$= -\frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int Sin\,\varphi^{m} \cdot Cos\,\varphi^{n+2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{VI.}$$

---

1) $$\int Sin(a\varphi+b) \cdot Cos(p\varphi+q) \cdot d\varphi = -\frac{Cos[(a+p)\varphi+b+q]}{2(a+p)} - \frac{Cos[(a-p)\varphi+b-q]}{2(a-p)}$$

2) $$\int Sin(a\varphi+b) \cdot Sin(p\varphi+q) \cdot d\varphi = \frac{Sin[(a-p)\varphi+b-q]}{2(a-p)} - \frac{Sin[(a+p)\varphi+b+q]}{2(a+p)}$$

3) $$\int Cos(a\varphi+b) \cdot Cos(p\varphi+q) \cdot d\varphi = \frac{Sin[(a+p)\varphi+b+q]}{2(a+p)} + \frac{Sin[(a-p)\varphi+b-q]}{2(a-p)}$$

Die Formeln in den folgenden Tab. XXXXIV.—XXXXIX. gelten auch, wenn statt $Sin\,\varphi$ und $Cos\,\varphi$ vorkommt $Sin(a\varphi+b)$ und $Cos(a\varphi+b)$. Nur muß man dann auch die Ausdrücke zur Rechten, die außerhalb des Integralzeichens stehen, mit $\frac{1}{a}$ multipliziren.

Tab. XXXXIV. $\int Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi$, $\int Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi$.

1) $\int Sin\,\varphi \cdot d\varphi = -Cos\,\varphi$

2) $\int Sin\,\varphi^2 \cdot d\varphi = -\frac{1}{2} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \frac{1}{2}\varphi = -\frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

3) $\int Sin\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (-\frac{1}{3} Sin\,\varphi^2 - \frac{2}{3})\, Cos\,\varphi = \frac{1}{12} Cos\,3\varphi - \frac{3}{4} Cos\,\varphi$

4) $\int Sin\,\varphi^4 \cdot d\varphi = (-\frac{1}{4} Sin\,\varphi^3 - \frac{3}{8} Sin\,\varphi)\, Cos\,\varphi + \frac{3}{8}\varphi$
$= \frac{1}{32} Sin\,4\varphi - \frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

5) $\int Sin\,\varphi^5 \cdot d\varphi = (-\frac{1}{5} Sin\,\varphi^4 - \frac{4}{15} Sin\,\varphi^2 - \frac{8}{15})\, Cos\,\varphi$
$= -\frac{1}{80} Cos\,5\varphi + \frac{5}{48} Cos\,3\varphi - \frac{5}{8} Cos\,\varphi$

6) $\int Sin\,\varphi^{2m} \cdot d\varphi$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot \underset{a+b\,=\,m-1}{S}\left[(-1)^{b+1} \cdot (2m)_a \cdot \frac{1}{(m-a)} \cdot Sin\,2(m-a)\,\varphi\right] + \frac{(2m)^{m|-1}}{2^{2m} \cdot m!} \cdot \varphi$$

7) $\int Sin\,\varphi^{2m+1} \cdot d\varphi$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot \underset{a+b\,=\,m}{S}\left[(-1)^{b+1} \cdot (2m+1)_a \cdot \frac{1}{2m-2a+1} \cdot Cos\,(2m-2a+1)\,\varphi\right]$$

---

1) $\int Cos\,\varphi \cdot d\varphi = Sin\,\varphi$

2) $\int Cos\,\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

3) $\int Cos\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (\frac{1}{3} Cos\,\varphi^2 + \frac{2}{3})\, Sin\,\varphi = \frac{1}{12} Siu\,3\varphi + \frac{3}{4} Sin\,\varphi$

4) $\int Cos\,\varphi^4 \cdot d\varphi = (\frac{1}{4} Cos\,\varphi^3 + \frac{3}{8} Cos\,\varphi)\, Sin\,\varphi + \frac{3}{8}\varphi$
$= \frac{1}{32} Sin\,4\varphi + \frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

5) $\int Cos\,\varphi^5 \cdot d\varphi = (\frac{1}{5} Cos\,\varphi^4 + \frac{4}{15} Cos\,\varphi^2 + \frac{8}{15})\, Sin\,\varphi$
$= \frac{1}{80} Sin\,5\varphi + \frac{5}{48} Sin\,3\varphi + \frac{5}{8} Sin\,\varphi$

6) $$\int Cos\,\varphi^{2n} \cdot d\varphi = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \underset{a+b\,=\,n-1}{S}\left[(2n)_a \cdot \frac{1}{n-a} \cdot Sin\,2(n-a)\,\varphi\right] + \frac{(2n)^{n|-1}}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \varphi$$

7) $$\int Cos\,\varphi^{2n+1} \cdot d\varphi = \frac{1}{2^{2n}} \cdot \underset{a+b\,=\,n}{S}\left[(2n+1)_a \cdot \frac{1}{2n-2a+1} \cdot Sin\,(2n-2a+1)\,\varphi\right]$$

Tab. XXXXV.

$$\int Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi, \quad \int Sin\,\varphi^{n} \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi, \quad \int Sin\,\varphi^{m} \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi.$$

---

1) $\int Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi = -\frac{1}{n+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}$

2) $\int Sin\,\varphi^{n} \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{n+1} \cdot Sin\,\varphi^{n+1}$

---

3) $\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{2} \cdot d\varphi = \frac{1}{4} Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi - \frac{1}{8} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \frac{1}{8}\varphi$
$= -\frac{1}{8}(\frac{1}{4} Sin\,4\varphi - \varphi)$

4) $\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{3} \cdot d\varphi = (\frac{1}{5} Cos\,\varphi^{2} + \frac{2}{15}) Sin\,\varphi^{3}$
$= -\frac{1}{16}(\frac{1}{5} Sin\,5\varphi + \frac{1}{3} Sin\,3\varphi - 2\,Sin\,\varphi)$

5) $\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{4} \cdot d\varphi = \frac{1}{6} Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{3} + \frac{1}{2}\int Sin\,\varphi^{2} \cdot Cos\,\varphi^{2}\,d\varphi$
$= -\frac{1}{32}(\frac{1}{6} Sin\,6\varphi + \frac{1}{2} Sin\,4\varphi - \frac{1}{2} Sin\,2\varphi - 2\varphi)$

---

6) $\int Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{2} \cdot d\varphi = (\frac{1}{5} Sin\,\varphi^{4} - \frac{1}{15} Sin\,\varphi^{2} - \frac{2}{15}) Cos\,\varphi$
$= \frac{1}{16}(\frac{1}{5} Cos\,5\varphi - \frac{1}{3} Cos\,3\varphi - 2\,Cos\,\varphi)$

7) $\int Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{3} \cdot d\varphi = (\frac{1}{6} Cos\,\varphi^{2} + \frac{1}{12}) Sin\,\varphi^{4}$
$= \frac{1}{32}(\frac{1}{6} Cos\,6\varphi - \frac{3}{2} Cos\,2\varphi)$

8) $\int Sin\,\varphi^{3} \cdot Cos\,\varphi^{4} \cdot d\varphi = \frac{1}{64}(\frac{1}{7} Cos\,7\varphi + \frac{1}{5} Cos\,5\varphi - Cos\,3\varphi - 3\,Cos\,\varphi)$

---

9) $\int Sin\,\varphi^{4} \cdot Cos\,\varphi^{2} \cdot d\varphi = (\frac{1}{6} Sin\,\varphi^{5} - \frac{1}{24} Sin\,\varphi^{3} - \frac{1}{16} Sin\,\varphi) Cos\,\varphi + \frac{1}{16}\varphi$
$= \frac{1}{32}(\frac{1}{6} Sin\,6\varphi - \frac{1}{2} Sin\,4\varphi - \frac{1}{2} Sin\,2\varphi + 2\varphi$

10) $\int Sin\,\varphi^{4} \cdot Cos\,\varphi^{3} \cdot d\varphi = (\frac{1}{7} Cos\,\varphi^{2} + \frac{2}{35}) Sin\,\varphi^{5}$
$= \frac{1}{64}(\frac{1}{7} Sin\,7\varphi - \frac{1}{5} Sin\,5\varphi - Sin\,3\varphi + 3\,Sin\,\varphi)$

11) $\int Sin\,\varphi^{4} \cdot Cos\,\varphi^{4} \cdot d\varphi = \frac{1}{128}(\frac{1}{8} Sin\,8\varphi - Sin\,4\varphi + 3\varphi)$

Tab. XXXXVI. $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^n}$, $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^n}$, $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^n}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi$, $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^n}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi$.

1) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \log \mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = -\mathrm{Cotg}\,\varphi$

3) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^3} = -\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

4) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^4} = \mathrm{Cotg}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cotg}\,\varphi^3$

5) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^5} = \left(-\frac{1}{4\,\mathrm{Sin}\,\varphi^4} - \frac{3}{8\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}\right) \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

6) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^6} = \left(-\frac{1}{5\,\mathrm{Sin}\,\varphi^5} - \frac{4}{15\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3} - \frac{8}{15\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\right) \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi$

---

7) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \log \mathrm{Tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$

8) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2} = \mathrm{Tg}\,\varphi$

9) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3} = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

10) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^4} = \mathrm{Tg}\,\varphi + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tg}\,\varphi^3$

11) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^5} = \left(\frac{1}{4\,\mathrm{Cos}\,\varphi^4} + \frac{3}{8\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2}\right) \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

12) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^6} = \left(\frac{1}{5\,\mathrm{Cos}\,\varphi^5} + \frac{4}{15\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3} + \frac{8}{15\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\right) \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi$

---

13) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\log \mathrm{Cos}\,\varphi = \log \mathrm{Sec}\,\varphi$

14) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

15) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^3}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi$

16) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^4}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3 - \mathrm{Sin}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

17) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^5}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi$

---

18) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \log \mathrm{Sin}\,\varphi$

19) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^2}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \mathrm{Cos}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

20) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^3}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi$

21) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^4}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \mathrm{Cos}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

22) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^5}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi$

[b]

Tab. XLVII. $\int \frac{Sin\,\varphi^m}{Cos\,\varphi^n} \cdot d\varphi.$

$$1)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^2} \cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi} - \varphi = Tg\,\varphi - \varphi$$

$$2)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^2 + 2) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi} = Cos\,\varphi + Sec\,\varphi$$

$$3)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{2} Sin\,\varphi^3 + \tfrac{3}{2} Sin\,\varphi) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi} - \tfrac{3}{2}\varphi$$

$$4)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{3} Sin\,\varphi^4 - \tfrac{4}{3} Sin\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi}$$

$$5)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^3} \cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi}{2\,Cos\,\varphi^2} - \tfrac{1}{2} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$6)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^3} \cdot d\varphi = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} + log\,Cos\,\varphi$$

$$7)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^3 + \tfrac{3}{2} Sin\,\varphi) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi^2} - \tfrac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$8)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{2} Sin\,\varphi^4 + 1) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi^2} + 2\,log\,Cos\,\varphi$$

$$9)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^4} \cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi^3}{3\,Cos\,\varphi^3} = \tfrac{1}{3} Tg\,\varphi^3$$

$$10)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (Sin\,\varphi^2 - \tfrac{2}{3}) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi^3}$$

$$11)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^4} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{3} Tg\,\varphi^3 - Tg\,\varphi + \varphi$$

$$12)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^4 + 4\,Sin\,\varphi^2 - \tfrac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi^3}$$

$$13)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{8} Sin\,\varphi^3 + \tfrac{1}{8} Sin\,\varphi) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi^4} - \tfrac{1}{8} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$14)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^5} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{4} Tg\,\varphi^4$$

$$15)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (\tfrac{5}{8} Sin\,\varphi^3 - \tfrac{3}{8} Sin\,\varphi) \cdot \frac{1}{Cos\,\varphi^4} + \tfrac{3}{8} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$16)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^5} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{4} Tg\,\varphi^4 - \tfrac{1}{2} Tg\,\varphi^2 - log\,Cos\,\varphi.$$

Tab. XLVIII. $\int \frac{Cos\,\varphi^n}{Sin\,\varphi^m} \cdot d\varphi.$

$$1)\ \int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = -Cotg\,\varphi - \varphi$$

$$2)\ \int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = \frac{Cos\,\varphi^2 - 2}{Sin\,\varphi} = -Sin\,\varphi - Cosec\,\varphi$$

$$3)\ \int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{2} Cos\,\varphi^3 - \tfrac{3}{2} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi} - \tfrac{3}{2}\varphi$$

$$4)\ \int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{3} Cos\,\varphi^4 + \tfrac{4}{3} Cos\,\varphi^2 - \tfrac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi}$$

$$5)\ \int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = -\frac{Cos\,\varphi}{2\,Sin\,\varphi^2} - \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$$

$$6)\ \int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = -\frac{1}{2\,Sin\,\varphi^2} - log\,Sin\,\varphi$$

$$7)\ \int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (Cos\,\varphi^3 - \tfrac{3}{2} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} - \tfrac{3}{2}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$$

$$8)\ \int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{2} Cos\,\varphi^4 - 1) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} - 2\,log\,Sin\,\varphi$$

$$9)\ \int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{3} Cotg\,\varphi^3$$

$$10)\ \int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (-Cos\,\varphi^2 + \tfrac{2}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^3}$$

$$11)\ \int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{3} Cotg\,\varphi^3 + Cotg\,\varphi + \varphi$$

$$12)\ \int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (Cos\,\varphi^4 - 4\,Cos\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^3}$$

$$13)\ \int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{8} Cos\,\varphi^3 - \tfrac{1}{8} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^4} - \tfrac{1}{8}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$$

$$14)\ \int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = -\frac{Cos\,\varphi^4}{4\,Sin\,\varphi^4} = -\tfrac{1}{4} Cotg\,\varphi^4$$

$$15)\ \int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (-\tfrac{5}{8} Cos\,\varphi^3 + \tfrac{3}{8} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^4} + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$$

$$16)\ \int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4} Cotg\,\varphi^4 + \tfrac{1}{2} Cotg\,\varphi^2 + log\,Sin\,\varphi$$

Tab. XLIX. $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n}$.

1) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi} = log\,Tg\,\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^2} = \frac{1}{Cos\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

3) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^3} = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} + log\,Tg\,\varphi$

4) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^4} = \frac{1}{3\,Cos\,\varphi^3} + \frac{1}{Cos\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

---

5) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{Sin\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

6) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^2} = -2\,Cotg\,2\varphi$

7) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^3} = \left(\frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi} + \frac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

8) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^4} = \frac{1}{3\,Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^3} - \frac{8}{3}\,Cotg\,2\varphi$

---

9) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{2\,Sin\,\varphi^2} + log\,Tg\,\varphi$

10) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^2} = \frac{1}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi} + 3 \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3}$

11) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^3} = -\frac{2\,Cos\,2\varphi}{Sin\,2\varphi^2} + 2\,log\,Tg\,\varphi$

12) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^4} = \left(\frac{1}{3\,Cos\,\varphi^3} + \frac{5}{3\,Cos\,\varphi}\right) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} + 5 \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3}$

---

13) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{3\,Sin\,\varphi^3} - \frac{1}{Sin\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

14) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^2} = -\frac{1}{3\,Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^3} - \frac{8}{3}\,Cotg\,2\varphi =$

15) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^3} = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2 \cdot Sin\,\varphi^3} + \frac{5}{2} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi}$

16) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^4} = \left(-\frac{8}{3\,Sin\,2\varphi^3} - \frac{16}{3\,Sin\,2\varphi}\right) \cdot Cos\,2\varphi$

Tab. L. $\int \varphi^n \cdot Sin\, \varphi^m \cdot d\varphi$, $\int \varphi^n \cdot Cos\, \varphi^m \cdot d\varphi$, so wie $\int X \cdot arc \cdot lin \cdot trig \cdot x \cdot dx$.

---

1) $\int \varphi^n \cdot Sin\, \varphi \cdot d\varphi$

$$= \underset{2a+b=n}{S}\left[(-1)^{a+1} \cdot n^{2a|-1} \cdot \varphi^{n-2a}\right] \cdot Cos\, \varphi + \underset{2a+b=n-1}{S}\left[(-1)^a \cdot n^{2a+1|-1} \cdot \varphi^{n-2a-1}\right] \cdot Sin\, \varphi$$

2) $\int \varphi^n \cdot Cos\, \varphi \cdot d\varphi$

$$= \underset{2a+b=n}{S}\left[(-1)^a \cdot n^{2a|-1} \cdot \varphi^{n-2a}\right] \cdot Sin\, \varphi + \underset{2a+b=n-1}{S}\left[(-1)^a \cdot n^{2a+1|-1} \cdot \varphi^{n-2a-1}\right] \cdot Cos\, \varphi$$

3) $$\int \varphi \cdot Sin\, \varphi^n \cdot d\varphi = \frac{Sin\, \varphi^n}{n^2} - \frac{\varphi \cdot Cos\, \varphi \cdot Sin\, \varphi^n}{n} + \frac{n-1}{n}\int \varphi \cdot Sin\, \varphi^{n-2} \cdot d\varphi$$

4) $$\int \varphi \cdot Cos\, \varphi^n \cdot d\varphi = \frac{Cos\, \varphi^n}{n^2} + \frac{\varphi \cdot Sin\, \varphi \cdot Cos\, \varphi^n}{n} + \frac{n-1}{n}\int \varphi \cdot Cos\, \varphi^{n-2} \cdot d\varphi$$

5) $$\int \varphi^n \cdot Sin\, \varphi^m \cdot d\varphi = -\frac{\varphi^n \cdot Cos\, \varphi \cdot Sin\, \varphi^{m-1}}{m} + \frac{n\varphi^{n-1} \cdot Sin\, \varphi^m}{m^2}$$
$$+ \frac{m-1}{m}\int \varphi^n \cdot Sin\, \varphi^{m-2} \cdot d\varphi - \frac{n(n-1)}{m^2}\int \varphi^{n-2} \cdot Sin\, \varphi^m \cdot d\varphi$$

6) $$\int \varphi^n \cdot Cos\, \varphi^m \cdot d\varphi = \frac{\varphi^n \cdot Sin\, \varphi \cdot Cos\, \varphi^{m-1}}{m} + \frac{n\varphi^{n-1} \cdot Cos\, \varphi^m}{m^2}$$
$$+ \frac{m-1}{m}\int \varphi^n \cdot Cos\, \varphi^{m-2} \cdot d\varphi - \frac{n(n-1)}{m^2}\int \varphi^{n-2} \cdot Cos\, \varphi^m \cdot d\varphi$$

---

7) $$\int X \cdot \frac{1}{Sin} x \cdot dx = \frac{1}{Sin} x \cdot \int X \cdot dx - \int \frac{\int X \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

8) $$\int X \cdot \frac{1}{Cos} x \cdot dx = \frac{1}{Cos} x \cdot \int X \cdot dx + \int \frac{\int X \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

9) $$\int X \cdot \frac{1}{Tg} x \cdot dx = \frac{1}{Tg} x \cdot \int X \cdot dx - \int \frac{\int X \cdot dx}{1+x^2} \cdot dx$$

10) $$\int X \cdot \frac{1}{Cotg} x \cdot dx = \frac{1}{Cotg} x \cdot \int X \cdot dx + \int \frac{\int X \cdot dx}{1+x^2} \cdot dx$$

wo X eine beliebige Funktion von x seyn kann, gewöhnlich aber als eine algebraische Funktion von x gedacht wird.

Diese Formeln können zunächst angewandt werden auf die Integration von $\frac{1}{Sin} x \cdot dx$, $x^m \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{x^m}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $\frac{x^m}{(1+x^2)^n} \cdot \frac{1}{Sin} x$, $a^x \cdot \frac{1}{Sin} x$, $x^m \cdot a^x \cdot \frac{1}{Sin} x$, und von denselben Formen, wenn $\frac{1}{Cos} x$, $\frac{1}{Tg} x$, $\frac{1}{Cotg} x$ statt $\frac{1}{Sin} x$ gesetzt wird; u. s. w.

Tab. XXXIX. $\int \frac{x^m}{X^{\frac{5}{2}}} \cdot dx, \quad \int \frac{dx}{x^m \cdot X^{\frac{5}{2}}}, \qquad \left.\begin{array}{r} a+bx+cx^2 = X \\ 4ac-b^2 = k \end{array}\right];$

$$1) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3kX} + \frac{8c}{3k^2}\right) \cdot \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$2) \int \frac{x \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{3cX \cdot \sqrt{X}} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$3) \int \frac{x^2 \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x}{2c} + \frac{b}{12c^2}\right) \cdot \frac{1}{X \cdot \sqrt{X}} + \left(\frac{b^2}{8c^2} + \frac{a}{2c}\right) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$4) \int \frac{x^3 \cdot dx}{X^{\frac{5}{2}}} = \left(-\frac{x^2}{c} - \frac{bx}{4c^2} + \frac{b^2}{24c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right) \cdot \frac{1}{X \cdot \sqrt{X}} + \left(\frac{b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right) \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}$$

$$5) \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{5}{2}}} = \left(\frac{1}{3aX} + \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} - \frac{b}{2a^2} \int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

$$6) \int \frac{dx}{x^2 \cdot X^{\frac{5}{2}}} = -\frac{1}{axX \cdot \sqrt{X}} - \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{5}{2}}} - \frac{4c}{a} \int \frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}}.$$

$$7) \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}} \cdot S\left[\frac{(n-3)^{\mathfrak{a}|-2} \cdot 4^{\mathfrak{a}} \cdot c^{\mathfrak{a}}}{(n-2)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot k^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{\frac{n-3-2\mathfrak{a}}{2}}}\right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu-1} + \frac{(n-3)^{\mu|-2} \cdot 4^{\mu} \cdot c^{\mu}}{(n-2)^{\mu|-2} \cdot k^{\mu}} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-\mu}}$$

$$8) \int \frac{dx}{x \cdot X^{\frac{n}{2}}} = S\left[\frac{1}{(n-2\mathfrak{a}-2)\, a^{\mathfrak{a}+1} \cdot X^{\frac{n-2-2\mathfrak{a}}{2}}}\right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n-3} - \frac{b}{2a} \cdot S\left[\frac{1}{a^{\mathfrak{c}}} \int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-\mathfrak{c}}}\right]_{2\mathfrak{c}+\mathfrak{b} = n-3} + \frac{1}{a^{\frac{n-1}{2}}} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

Tab. XXXX.

$$\left[\int x^m \cdot \sqrt{X} \cdot dx,\ \int \frac{\sqrt{X}}{x^m} \cdot dx,\ \int x^m \cdot X^{\frac{3}{2}} \cdot dx,\ \int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^m} \cdot dx,\ \begin{matrix} a+bx+cx^2=X \\ 4ac-b^2=k \end{matrix}\right].$$

$$1)\ \int \sqrt{X} \cdot dx = \frac{(2cx+b)\cdot\sqrt{X}}{4c} + \frac{k}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$2)\ \int x \cdot \sqrt{X} \cdot dx = \frac{X \cdot \sqrt{X}}{3c} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{X} \cdot dx$$

$$3)\ \int x^2 \cdot \sqrt{X} \cdot dx = \left(\frac{x}{4c} - \frac{5b}{24c^2}\right) \cdot X \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{5b^2}{6c^2} - \frac{a}{4c}\right)\int \sqrt{X} \cdot dx$$

$$4)\ \int x^3 \cdot \sqrt{X} \cdot dx = \left(\frac{x^2}{5c} - \frac{7bx}{40c^2} + \frac{7b^2}{48c^3} - \frac{2a}{15c^2}\right) \cdot X^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{7b^3}{32c^3} - \frac{3ab}{8c^2}\right)\int \sqrt{X} \cdot dx$$

$$5)\ \int \frac{\sqrt{X}}{x} \cdot dx = \sqrt{X} + a\int\frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$6)\ \int \frac{\sqrt{X}}{x^2} \cdot dx = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \tfrac{1}{2}b\int\frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + c\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$7)\ \int \frac{\sqrt{X}}{x^3} \cdot dx = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right) \cdot \sqrt{X} - \left(\frac{b^2}{8a} - \frac{c}{2}\right)\int\frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

$$8)\ \int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\frac{X}{8c} + \frac{3k}{64c^2}\right) \cdot (2cx+b)\sqrt{X} + \frac{3k^2}{128c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$9)\ \int x \cdot X^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \frac{X^2 \cdot \sqrt{X}}{5c} - \frac{b}{2c}\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

$$10)\ \int x^2 \cdot X^{\frac{3}{2}} \cdot dx = \left(\frac{x}{6c} - \frac{7b}{60c^2}\right) \cdot X^2 \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right)\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

$$11)\ \int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx = \left(\frac{X}{3} + a\right) \cdot \sqrt{X} + a^2\int\frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{b}{2}\int \sqrt{X} \cdot dx$$

$$12)\ \int \frac{X^{\frac{3}{2}}}{x^2} \cdot dx = -\frac{X^2 \cdot \sqrt{X}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int\frac{X^{\frac{3}{2}}}{x} \cdot dx + \frac{4c}{a}\int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

Tab. XXXXI. $\int x^m \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$, $\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x^m} \cdot dx$, $\left. \begin{matrix} a+bx+cx^2 = X \\ 4ac-b^2 = k \end{matrix} \right]$.

---

1) $$\int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \left(\frac{X^2}{12c} + \frac{5kX}{192c^2} + \frac{5k^2}{512c^3}\right) \cdot (2cx+b) \cdot \sqrt{X} + \frac{5k^3}{1024c^3} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

2) $$\int x \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \frac{X^3 \cdot \sqrt{X}}{7c} - \frac{b}{2c} \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

3) $$\int x^2 \cdot X^{\frac{5}{2}} \cdot dx = \left(\frac{x}{8c} - \frac{9b}{112c^2}\right) \cdot X^3 \cdot \sqrt{X} + \left(\frac{9b^2}{32c^2} - \frac{a}{8c}\right) \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

---

4) $$\int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x} \cdot dx = \left(\frac{X^2}{5} + \frac{aX}{3} + a^2\right) \cdot \sqrt{X} + a^3 \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}} + \frac{a^2 b}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{X}}$$
$$+ \frac{ab}{2} \int \sqrt{X} \cdot dx + \frac{b}{2} \int X^{\frac{3}{2}} \cdot dx$$

5) $$\int \frac{X^{\frac{5}{2}} \cdot dx}{x^2} = -\frac{X^3 \cdot \sqrt{X}}{ax} + \frac{5b}{2a} \int \frac{X^{\frac{5}{2}}}{x} \cdot dx + \frac{6c}{a} \int X^{\frac{5}{2}} \cdot dx$$

---

6) $$\int X^{\frac{n}{2}} \cdot dx = (2cx+b) \cdot \sqrt{X} \cdot S \left[\frac{n^{\mathfrak{a}|-2} \cdot k^{\mathfrak{a}} \cdot X^{\frac{n-2\mathfrak{a}-1}{2}}}{(n+1)^{\mathfrak{a}+1|-2} \cdot 2^{2\mathfrak{a}+1} \cdot c^{\mathfrak{a}+1}} \right]_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \mu-1}$$
$$+ \frac{n^{\mu|-2} \cdot k^{\mu}}{(n+1)^{\mu|-2} \cdot 2^{\mu} \cdot c^{\mu}} \int X^{\frac{n}{2}-\mu} \cdot dx$$

7) $$\int \frac{X^{\frac{n}{2}}}{x} \cdot dx = \sqrt{X} \cdot S \left[\frac{a^{\mathfrak{a}} \cdot X^{\frac{n-1}{2}-\mathfrak{a}}}{n-2\mathfrak{a}} \right]_{2\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = n-1} + \frac{b}{2} \cdot S \left[a^{\mathfrak{a}} \int X^{\frac{n}{2}-\mathfrak{c}-1} \cdot dx \right]_{2\mathfrak{c}-\mathfrak{b} = n-1}$$
$$+ a^{\frac{n+1}{2}} \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{X}}$$

Tab. XXXXII. $\int \frac{x^m \cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}}$, $\left[\begin{array}{l} a+bx+cx^2 = X \\ ag^2-bfg+cf^2 = k \end{array}\right]$.

1) $$\int \frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \pm\frac{1}{\sqrt{k}}\cdot log\frac{2ag-bf+(bg-2cf)x\mp 2\sqrt{k}\cdot\sqrt{X}}{f+gx}$$

oder $$= \frac{1}{\sqrt{-k}}\cdot\frac{1}{Tg}\frac{2ag-bf+(bg-2cf)x}{2\sqrt{-k}\cdot\sqrt{X}}$$

2) $$\int \frac{x\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f}{g}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

3) $$\int \frac{x^2\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^2}{g^2}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

4) $$\int \frac{x^3\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^2}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^3}{g^3}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

5) $$\int \frac{x^4\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^3}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f}{g^2}\int\frac{x^2}{\sqrt{X}}\cdot dx + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{x}{\sqrt{X}}\cdot dx - \frac{f^3}{g^4}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^4}{g^4}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

6) $$\int \frac{x^5\cdot dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}} = \frac{1}{g}\int\frac{x^4\cdot dx}{\sqrt{X}} - \frac{f}{g^2}\int\frac{x^3\cdot dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^2}{g^3}\int\frac{x^2\cdot dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^3}{g^4}\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{X}} + \frac{f^4}{g^5}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} - \frac{f^5}{g^5}\int\frac{dx}{(f+gx)\cdot\sqrt{X}}$$

Tab. XXXXIII. Reduktionsformeln für $\int Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi$.

$$\int Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n \cdot dx$$

$$= \frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n-1}}{m+1} + \frac{n-1}{m-1}\int Sin\,\varphi^{m+2} \cdot Cos\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{ I.}$$

$$= -\frac{Sin\,\varphi^{m-1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int Sin\,\varphi^{m-2} \cdot Cos\,\varphi^{n+2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{ II.}$$

$$= -\frac{Sin\,\varphi^{m-1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int Sin\,\varphi^{m-2} \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{ III.}$$

$$= \frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int Sin\,\varphi^{m} \cdot Cos\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{ IV.}$$

$$= \frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int Sin\,\varphi^{m+2} \cdot Cos\,\varphi^{n} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{ V.}$$

$$= -\frac{Sin\,\varphi^{m+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int Sin\,\varphi^{m} \cdot Cos\,\varphi^{n+2} \cdot d\varphi \quad \cdots \text{ VI.}$$

---

1) $$\int Sin(a\varphi+b) \cdot Cos(p\varphi+q) \cdot d\varphi = -\frac{Cos[(a+p)\varphi+b+q]}{2(a+p)} - \frac{Cos[(a-p)\varphi+b-q]}{2(a-p)}$$

2) $$\int Sin(a\varphi+b) \cdot Sin(p\varphi+q) \cdot d\varphi = \frac{Sin[(a-p)\varphi+b-q]}{2(a-p)} - \frac{Sin[(a+p)\varphi+b+q]}{2(a+p)}$$

3) $$\int Cos(a\varphi+b) \cdot Cos(p\varphi+q) \cdot d\varphi = \frac{Sin[(a+p)\varphi+b+q]}{2(a+p)} + \frac{Sin[(a-p)\varphi+b-q]}{2(a-p)}$$

Die Formeln in den folgenden Tab. XXXXIV.—XXXXIX. gelten auch, wenn statt $Sin\,\varphi$ und $Cos\,\varphi$ vorkommt $Sin(a\varphi+b)$ und $Cos(a\varphi+b)$. Nur muß man dann auch die Ausdrücke zur Rechten, die außerhalb des Integralzeichens stehen, mit $\frac{1}{a}$ multipliziren.

Tab. XXXXIV. $\int Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi$, $\int Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi$.

1) $\int Sin\,\varphi \cdot d\varphi = -Cos\,\varphi$

2) $\int Sin\,\varphi^2 \cdot d\varphi = -\frac{1}{2} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \frac{1}{2}\varphi = -\frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

3) $\int Sin\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (-\frac{1}{3} Sin\,\varphi^2 - \frac{2}{3})\, Cos\,\varphi = \frac{1}{12} Cos\,3\varphi - \frac{3}{4} Cos\,\varphi$

4) $\int Sin\,\varphi^4 \cdot d\varphi = (-\frac{1}{4} Sin\,\varphi^3 - \frac{3}{8} Sin\,\varphi)\, Cos\,\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

$= \frac{1}{32} Sin\,4\varphi - \frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

5) $\int Sin\,\varphi^5 \cdot d\varphi = (-\frac{1}{5} Sin\,\varphi^4 - \frac{4}{15} Sin\,\varphi^2 - \frac{8}{15})\, Cos\,\varphi$

$= -\frac{1}{80} Cos\,5\varphi + \frac{5}{48} Cos\,3\varphi - \frac{5}{8} Cos\,\varphi$

6) $\int Sin\,\varphi^{2m} \cdot d\varphi$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot S\left[(-1)^{b+1} \cdot (2m)_a \cdot \frac{1}{(m-a)} \cdot Sin\,2(m-a)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,m-1} + \frac{(2m)^{m|-1}}{2^{2m} \cdot m!} \cdot \varphi$$

7) $\int Sin\,\varphi^{2m+1} \cdot d\varphi$

$$= \frac{1}{2^{2m}} \cdot S\left[(-1)^{b+1} \cdot (2m+1)_a \cdot \frac{1}{2m-2a+1} \cdot Cos\,(2m-2a+1)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,m}$$

---

1) $\int Cos\,\varphi \cdot d\varphi = Sin\,\varphi$

2) $\int Cos\,\varphi^2 \cdot d\varphi = \frac{1}{2} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

3) $\int Cos\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (\frac{1}{3} Cos\,\varphi^2 + \frac{2}{3})\, Sin\,\varphi = \frac{1}{12} Siu\,3\varphi + \frac{3}{4} Sin\,\varphi$

4) $\int Cos\,\varphi^4 \cdot d\varphi = (\frac{1}{4} Cos\,\varphi^3 + \frac{3}{8} Cos\,\varphi)\, Sin\,\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

$= \frac{1}{32} Sin\,4\varphi + \frac{1}{4} Sin\,2\varphi + \frac{3}{8}\varphi$

5) $\int Cos\,\varphi^5 \cdot d\varphi = (\frac{1}{5} Cos\,\varphi^4 + \frac{4}{15} Cos\,\varphi^2 + \frac{8}{15})\, Sin\,\varphi$

$= \frac{1}{80} Sin\,5\varphi + \frac{5}{48} Sin\,3\varphi + \frac{5}{8} Sin\,\varphi$

6) $$\int Cos\,\varphi^{2n} \cdot d\varphi = \frac{1}{2^{2n}} \cdot S\left[(2n)_a \cdot \frac{1}{n-a} \cdot Sin\,2(n-a)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,n-1} + \frac{(2n)^{n|-1}}{2^{2n} \cdot n!} \cdot \varphi$$

7) $$\int Cos\,\varphi^{2n+1} \cdot d\varphi = \frac{1}{2^{2n}} \cdot S\left[(2n+1)_a \cdot \frac{1}{2n-2a+1} \cdot Sin\,(2n-2a+1)\,\varphi\right]_{a+b\,=\,n}$$

Tab. XXXXV.

$$\int Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi, \quad \int Sin\,\varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi, \quad \int Sin\,\varphi^m \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi.$$

---

1) $$\int Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi = -\frac{1}{n+1} \cdot Cos\,\varphi^{n+1}$$

2) $$\int Sin\,\varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi = \frac{1}{n+1} \cdot Sin\,\varphi^{n+1}$$

---

3) $$\int Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^2 \cdot d\varphi = \tfrac{1}{4} Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi - \tfrac{1}{8} Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi + \tfrac{1}{8}\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{8}(\tfrac{1}{4} Sin\,4\varphi - \varphi)$$

4) $$\int Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{5} Cos\,\varphi^2 + \tfrac{2}{15}) Sin\,\varphi^3$$
$$= -\tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5} Sin\,5\varphi + \tfrac{1}{3} Sin\,3\varphi - 2\,Sin\,\varphi)$$

5) $$\int Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^4 \cdot d\varphi = \tfrac{1}{6} Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^3 + \tfrac{1}{2}\int Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^2\, d\varphi$$
$$= -\tfrac{1}{32}(\tfrac{1}{6} Sin\,6\varphi + \tfrac{1}{2} Sin\,4\varphi - \tfrac{1}{2} Sin\,2\varphi - 2\varphi)$$

---

6) $$\int Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^2 \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{5} Sin\,\varphi^4 - \tfrac{1}{15} Sin\,\varphi^2 - \tfrac{2}{15})\, Cos\,\varphi$$
$$= \tfrac{1}{16}(\tfrac{1}{5} Cos\,5\varphi - \tfrac{1}{3} Cos\,3\varphi - 2\,Cos\,\varphi)$$

7) $$\int Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{6} Cos\,\varphi^2 + \tfrac{1}{12}) Sin\,\varphi^4$$
$$= \tfrac{1}{32}(\tfrac{1}{6} Cos\,6\varphi - \tfrac{3}{2} Cos\,2\varphi)$$

8) $$\int Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^4 \cdot d\varphi = \tfrac{1}{64}(\tfrac{1}{7} Cos\,7\varphi + \tfrac{1}{5} Cos\,5\varphi - Cos\,3\varphi - 3\,Cos\,\varphi)$$

---

9) $$\int Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^2 \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{6} Sin\,\varphi^5 - \tfrac{1}{24} Sin\,\varphi^3 - \tfrac{1}{16} Sin\,\varphi)\, Cos\,\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi$$
$$= \tfrac{1}{32}(\tfrac{1}{6} Sin\,6\varphi - \tfrac{1}{2} Sin\,4\varphi - \tfrac{1}{2} Sin\,2\varphi + 2\varphi$$

10) $$\int Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^3 \cdot d\varphi = (\tfrac{1}{7} Cos\,\varphi^2 + \tfrac{2}{35}) Sin\,\varphi^5$$
$$= \tfrac{1}{64}(\tfrac{1}{7} Sin\,7\varphi - \tfrac{1}{5} Sin\,5\varphi - Sin\,3\varphi + 3\,Sin\,\varphi)$$

11) $$\int Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^4 \cdot d\varphi = \tfrac{1}{128}(\tfrac{1}{8} Sin\,8\varphi - Sin\,4\varphi + 3\varphi)$$

Tab. XXXXVI. $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^n}$, $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^n}$, $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^n}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi$, $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^n}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi$.

1) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} = \log \mathrm{Tg}\, \tfrac{1}{2}\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^2} = -\mathrm{Cotg}\,\varphi$

3) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^3} = -\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

4) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^4} = \mathrm{Cotg}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cotg}\,\varphi^3$

5) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^5} = \left(-\frac{1}{4\,\mathrm{Sin}\,\varphi^4} - \frac{3}{8\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}\right) \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

6) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi^6} = \left(-\frac{1}{5\,\mathrm{Sin}\,\varphi^5} - \frac{4}{15\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3} - \frac{8}{15\,\mathrm{Sin}\,\varphi}\right) \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi$

---

7) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} = \log \mathrm{Tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi)$

8) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^2} = \mathrm{Tg}\,\varphi$

9) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^3} = \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

10) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^4} = \mathrm{Tg}\,\varphi + \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Tg}\,\varphi^3$

11) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^5} = \left(\frac{1}{4\,\mathrm{Cos}\,\varphi^4} + \frac{3}{8\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2}\right) \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi + \tfrac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

12) $\int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi^6} = \left(\frac{1}{5\,\mathrm{Cos}\,\varphi^5} + \frac{4}{15\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3} + \frac{8}{15\,\mathrm{Cos}\,\varphi}\right) \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi$

---

13) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\log \mathrm{Cos}\,\varphi = \log \mathrm{Sec}\,\varphi$

14) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\mathrm{Sin}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

15) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^3}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi$

16) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^4}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{3}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^3 - \mathrm{Sin}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi}$

17) $\int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi^5}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Sin}\,\varphi}{\mathrm{Cos}\,\varphi} \cdot d\varphi$

---

18) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \log \mathrm{Sin}\,\varphi$

19) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^2}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \mathrm{Cos}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

20) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^3}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi$

21) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^4}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{3}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^3 + \mathrm{Cos}\,\varphi + \int \frac{d\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi}$

22) $\int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^5}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^4 + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + \int \frac{\mathrm{Cos}\,\varphi}{\mathrm{Sin}\,\varphi} \cdot d\varphi$

Tab. XLVII. $\int \frac{Sin\,\varphi^m}{Cos\,\varphi^n}\cdot d\varphi.$

$$1)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi}{Cos\,\varphi} - \varphi = Tg\,\varphi - \varphi$$

$$2)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^2 + 2)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi} = Cos\,\varphi + Sec\,\varphi$$

$$3)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{2}Sin\,\varphi^3 + \tfrac{3}{2}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi} - \tfrac{3}{2}\varphi$$

$$4)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^2}\cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{3}Sin\,\varphi^4 - \tfrac{4}{3}Sin\,\varphi^2 + \tfrac{8}{3})\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi}$$

$$5)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi}{2\,Cos\,\varphi^2} - \tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$6)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} + log\,Cos\,\varphi$$

$$7)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^3 + \tfrac{3}{2}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^2} - \tfrac{3}{2}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$8)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^3}\cdot d\varphi = (-\tfrac{1}{2}Sin\,\varphi^4 + 1)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^2} + 2\,log\,Cos\,\varphi$$

$$9)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi^3}{3\,Cos\,\varphi^3} = \tfrac{1}{3}Tg\,\varphi^3$$

$$10)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = (Sin\,\varphi^2 - \tfrac{2}{3})\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^3}$$

$$11)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{3}Tg\,\varphi^3 - Tg\,\varphi + \varphi$$

$$12)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^4}\cdot d\varphi = (-Sin\,\varphi^4 + 4\,Sin\,\varphi^2 - \tfrac{8}{3})\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^3}$$

$$13)\ \int \frac{Sin\,\varphi^2}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = (\tfrac{1}{8}Sin\,\varphi^3 + \tfrac{1}{8}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^4} - \tfrac{1}{8}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$14)\ \int \frac{Sin\,\varphi^3}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}Tg\,\varphi^4$$

$$15)\ \int \frac{Sin\,\varphi^4}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = (\tfrac{5}{8}Sin\,\varphi^3 - \tfrac{3}{8}Sin\,\varphi)\cdot\frac{1}{Cos\,\varphi^4} + \tfrac{3}{8}\int\frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$$

$$16)\ \int \frac{Sin\,\varphi^5}{Cos\,\varphi^5}\cdot d\varphi = \tfrac{1}{4}Tg\,\varphi^4 - \tfrac{1}{2}Tg\,\varphi^2 - log\,Cos\,\varphi.$$

1) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = -Cotg\,\varphi - \varphi$

2) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = \frac{Cos\,\varphi^2 - 2}{Sin\,\varphi} = -Sin\,\varphi - Cosec\,\varphi$

3) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (\frac{1}{2} Cos\,\varphi^3 - \frac{3}{2} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi} - \frac{3}{2}\varphi$

4) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^2} \cdot d\varphi = (\frac{1}{3} Cos\,\varphi^4 + \frac{4}{3} Cos\,\varphi^2 - \frac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi}$

---

5) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = -\frac{Cos\,\varphi}{2\,Sin\,\varphi^2} - \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

6) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = -\frac{1}{2\,Sin\,\varphi^2} - log\,Sin\,\varphi$

7) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (Cos\,\varphi^3 - \frac{3}{2} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} - \frac{3}{2}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

8) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^3} \cdot d\varphi = (\frac{1}{2} Cos\,\varphi^4 - 1) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} - 2\,log\,Sin\,\varphi$

---

9) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = -\frac{1}{3} Cotg\,\varphi^3$

10) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (-Cos\,\varphi^2 + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^3}$

11) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = -\frac{1}{3} Cotg\,\varphi^3 + Cotg\,\varphi + \varphi$

12) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^4} \cdot d\varphi = (Cos\,\varphi^4 - 4\,Cos\,\varphi^2 + \frac{8}{3}) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^3}$

---

13) $\int \frac{Cos\,\varphi^2}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (-\frac{1}{4} Cos\,\varphi^3 - \frac{1}{8} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^4} - \frac{1}{8}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

14) $\int \frac{Cos\,\varphi^3}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = -\frac{Cos\,\varphi^4}{4\,Sin\,\varphi^4} = -\frac{1}{4} Cotg\,\varphi^4$

15) $\int \frac{Cos\,\varphi^4}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = (-\frac{5}{8} Cos\,\varphi^3 + \frac{3}{8} Cos\,\varphi) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^4} + \frac{3}{8}\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

16) $\int \frac{Cos\,\varphi^5}{Sin\,\varphi^5} \cdot d\varphi = -\frac{1}{4} Cotg\,\varphi^4 + \frac{1}{2} Cotg\,\varphi^2 + log\,Sin\,\varphi$

1) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi} = log\, Tg\,\varphi$

2) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^2} = \frac{1}{Cos\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

3) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^3} = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} + log\, Tg\,\varphi$

4) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^4} = \frac{1}{3\,Cos\,\varphi^3} + \frac{1}{Cos\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi}$

---

5) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{Sin\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

6) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^2} = -2\,Cotg\,2\varphi$

7) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^3} = \left(\frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2} - \frac{3}{2}\right) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi} + \frac{3}{2} \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

8) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi^4} = \frac{1}{3\,Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^3} - \frac{8}{3}\,Cotg\,2\varphi$

---

9) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{2\,Sin\,\varphi^2} + log\, Tg\,\varphi$

10) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^2} = \frac{1}{Sin\,\varphi^2 \cdot Cos\,\varphi} + 3 \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3}$

11) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^3} = -\frac{2\,Cos\,2\varphi}{Sin\,2\varphi^2} + 2\,log\, Tg\,\varphi$

12) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3 \cdot Cos\,\varphi^4} = \left(\frac{1}{3\,Cos\,\varphi^3} + \frac{5}{3\,Cos\,\varphi}\right) \cdot \frac{1}{Sin\,\varphi^2} + 5 \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^3}$

---

13) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi} = -\frac{1}{3\,Sin\,\varphi^3} - \frac{1}{Sin\,\varphi} + \int \frac{d\varphi}{Cos\,\varphi}$

14) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^2} = -\frac{1}{3\,Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^3} - \frac{8}{3}\,Cotg\,2\varphi =$

15) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^3} = \frac{1}{2\,Cos\,\varphi^2 \cdot Sin\,\varphi^3} + \frac{5}{2} \int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi}$

16) $\int \frac{d\varphi}{Sin\,\varphi^4 \cdot Cos\,\varphi^4} = \left(-\frac{8}{3\,Sin\,2\varphi^3} - \frac{16}{3\,Sin\,2\varphi}\right) \cdot Cos\,2\varphi$

Tab. L. $\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi$, $\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi^m \cdot d\varphi$, so wie $\int X \cdot arc \cdot lin \cdot trig \cdot x \cdot dx$.

1) $\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi \cdot d\varphi$

$$= \underset{2a+b=n}{S}\left[(-1)^{a+1} \cdot n^{2a|-1} \cdot \varphi^{n-2a}\right] \cdot Cos\,\varphi + \underset{2a+b=n-1}{S}\left[(-1)^{a} \cdot n^{2a+1|-1} \cdot \varphi^{n-2a-1}\right] \cdot Sin\,\varphi$$

2) $\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot d\varphi$

$$= \underset{2a+b=n}{S}\left[(-1)^{a} \cdot n^{2a|-1} \cdot \varphi^{n-2a}\right] \cdot Sin\,\varphi + \underset{2a+b=n-1}{S}\left[(-1)^{a} \cdot n^{2a+1|-1} \cdot \varphi^{n-2a-1}\right] \cdot Cos\,\varphi$$

3) $$\int \varphi \cdot Sin\,\varphi^n \cdot d\varphi = \frac{Sin\,\varphi^n}{n^2} - \frac{\varphi \cdot Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^n}{n} + \frac{n-1}{n}\int \varphi \cdot Sin\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi$$

4) $$\int \varphi \cdot Cos\,\varphi^n \cdot d\varphi = \frac{Cos\,\varphi^n}{n^2} + \frac{\varphi \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^n}{n} + \frac{n-1}{n}\int \varphi \cdot Cos\,\varphi^{n-2} \cdot d\varphi$$

5) $$\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi = -\frac{\varphi^n \cdot Cos\,\varphi \cdot Sin\,\varphi^{m-1}}{m} + \frac{n\varphi^{n-1} \cdot Sin\,\varphi^m}{m^2}$$
$$+ \frac{m-1}{m}\int \varphi^n \cdot Sin\,\varphi^{m-2} \cdot d\varphi - \frac{n(n-1)}{m^2}\int \varphi^{n-2} \cdot Sin\,\varphi^m \cdot d\varphi$$

6) $$\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi^m \cdot d\varphi = \frac{\varphi^n \cdot Sin\,\varphi \cdot Cos\,\varphi^{m-1}}{m} + \frac{n\varphi^{n-1} \cdot Cos\,\varphi^m}{m^2}$$
$$+ \frac{m-1}{m}\int \varphi^n \cdot Cos\,\varphi^{m-2} \cdot d\varphi - \frac{n(n-1)}{m^2}\int \varphi^{n-2} \cdot Cos\,\varphi^m \cdot d\varphi$$

---

7) $$\int X \cdot \frac{1}{Sin}x \cdot dx = \frac{1}{Sin}x \cdot \int X \cdot dx - \int \frac{\int X \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

8) $$\int X \cdot \frac{1}{Cos}x \cdot dx = \frac{1}{Cos}x \cdot \int X \cdot dx + \int \frac{\int X \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}} \cdot dx$$

9) $$\int X \cdot \frac{1}{Tg}x \cdot dx = \frac{1}{Tg}x \cdot \int X \cdot dx - \int \frac{\int X \cdot dx}{1+x^2} \cdot dx$$

10) $$\int X \cdot \frac{1}{Cotg}x \cdot dx = \frac{1}{Cotg}x \cdot \int X \cdot dx + \int \frac{\int X \cdot dx}{1+x^2} \cdot dx$$

wo X eine beliebige Funktion von x seyn kann, gewöhnlich aber als eine algebraische Funktion von x gedacht wird.

Diese Formeln können zunächst angewandt werden auf die Integration von $\frac{1}{Sin}x \cdot dx$, $x^m \cdot \frac{1}{Sin}x$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{Sin}x$, $\frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{Sin}x$, $\frac{x^m}{(1-x^2)^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{1}{Sin}x$, $\frac{x^m}{(1+x^2)^n} \cdot \frac{1}{Sin}x$, $a^x \cdot \frac{1}{Sin}x$, $x^m \cdot a^x \cdot \frac{1}{Sin}x$, und von denselben Formen, wenn $\frac{1}{Cos}x$, $\frac{1}{Tg}x$, $\frac{1}{Cotg}x$ statt $\frac{1}{Sin}x$ gesetzt wird; u. s. w.

1) $\int f_x \cdot \log \varphi_x \cdot dx = \log \varphi_x \cdot \int f_x \cdot dx - \int \frac{\int f_x \cdot dx}{\varphi_x} \cdot d\varphi_x$

Diese Formel kann zunächst angewandt werden auf die Integration von $\varphi_x \cdot \log x \cdot dx$, $x^m \cdot \log x \cdot dx$, $a^x \cdot \log x \cdot dx$, $(a+bx)^m \cdot \log x \cdot dx$, $\frac{\log x}{x} \cdot dx$, $\frac{\log x}{a+b} \cdot dx$ 2c. 2c. 2c. — Und sie gibt auch

2) $\int X \cdot \log x^n \cdot dx$

$$= S\left[(-1)^a \cdot n^{a|-1} \cdot X_{a+1} \cdot \log x^{n-a}\right]_{a+b=\mu-1} + (-1)^\mu \cdot n^{\mu|-1} \int \frac{X_\mu \cdot \log x^{n-\mu} \cdot dx}{x},$$

wenn $X_1 = \int X \cdot dx$, dagegen $X_{b+2} = \int \frac{X_{b+1}}{x} \cdot dx$ ist.

Diese Formel (2.) läßt sich zunächst anwenden auf die Integration von $x^m \cdot \log x^n \cdot dx$, $x^{-1} \cdot \log x^n \cdot dx$, $\frac{x^m}{\sqrt{\log x}} \cdot dx$, $\frac{x^m}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} \cdot dx$ 2c. 2c. 2c.

3) $\int \frac{X}{\log x^n} \cdot dx = -S\left[\frac{X_a \cdot x}{(n-1)^{a+1|-1} \cdot \log x^{n-a-1}}\right]_{a+b=\mu-1} + \frac{1}{(n-1)^{\mu|-1}} \int \frac{X_\mu}{\log x^{n-\mu}} \cdot dx$

wenn $X_0 = X$ und $X_{a+1} = \frac{d(X_a \cdot x)}{dx}$ genommen wird.

Diese Formel kann aber zunächst gebraucht werden zur Integration von $\frac{x^m}{\log x^n} \cdot dx$, $\frac{1}{x \cdot \log x^n} \cdot dx$, $\frac{1}{\log x} \cdot dx$, $\frac{1}{\log \frac{1}{x}} \cdot dx$ 2c. 2c.

4) $\int \frac{\log x^n}{x} \cdot dx = \frac{1}{n+1} \cdot \log x^{n+1}$

5) $\int \frac{x^m \cdot dx}{\log x} = \int \frac{dy}{\log y}$, wenn $x^{m+1} = y$.

$$\int a^x \cdot X \cdot dx, \int e^{ax} \cdot Sin\, x^n \cdot dx, \int e^{ax} \cdot Cos\, x^n \cdot dx, \int \frac{f + g \cdot Cos\, \varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n} \cdot dx.$$

1) $$\int a^x \cdot X \cdot dx = \underset{a+b=\mu-1}{S}\left[(-1)^a \cdot \frac{a^x \cdot X_a}{(log\, a)^{a+1}}\right] + (-1)^\mu \cdot \frac{1}{(log\, a)^\mu} \int a^x \cdot X_\mu \cdot dx,$$

wenn $X_0 = X$ aber $X_{a+1} = \frac{dX_a}{dx}$ ist.

2) $$\int a^x \cdot X \cdot dx = \underset{a+b=\mu-1}{S}\left[(-1)^a \cdot a^x \cdot X_{a+1} \cdot log\, a^a\right] + (-1)^\mu \cdot (log\, a)^\mu \int a^x \cdot X_{\mu+1} \cdot dx,$$

wenn $X_{a+1} = \int X_a \cdot dx$ und $X_0 = X$ genommen wird.

Anwendbar zunächst auf die Integration von

$a^x \cdot x^n \cdot dx$, $\frac{a^x}{x^n} \cdot dx$, $\frac{a^x}{\sqrt{x}} \cdot dx$, $\frac{a^x}{1-x} \cdot dx$, $a^{mx} \cdot x^n \cdot dx$,

$x^{nx} \cdot x^m \cdot dx$ ꝛc. ꝛc. ꝛc.

3) $$\int e^{ax} \cdot Sin\, x^n \cdot dx = \frac{e^{ax} \cdot Sin\, x^{n-1} \cdot (a \cdot Sin\, x - n \cdot Cos\, x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot Sin\, x^{n-2} \cdot dx$$

4) $$\int e^{ax} \cdot Cos\, x^n \cdot dx = \frac{e^{ax} \cdot Cos\, x^{n-1} \cdot (a \cdot Cos\, x + n \cdot Sin\, x)}{a^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2} \int e^{ax} \cdot Cos\, x^{n-2} \cdot dx.$$

Diese beiden Formeln kann man auch leicht brauchbar machen, für den Fall, daß $Sin\,(px + q)$, $Cos\,(px + q)$, statt $Sin\, x$, $Cos\, x$, stehen sollte; $px + q = z$ setzend.

5) $$\int \frac{f + g \cdot Cos\, \varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n} \cdot d\varphi = \frac{(ag - bf) \cdot Sin\, \varphi}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b \cdot Cos\, \varphi)^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2)} \int \frac{(n-1)(af - bg) + (n-2)(ag - bf) \cdot Cos\, \varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^{n-1}} \cdot d\varphi.$$

Zunächst anwendbar auf die Integration von

$\frac{d\varphi}{a + b \cdot Cos\, \varphi}$, $\frac{d\varphi}{1 + Cos\, \varphi}$, $\frac{Sin\, \varphi}{a + b \cdot Cos\, \varphi} \cdot d\varphi$, $\frac{Cos\, \varphi}{a + b \cdot Cos\, \varphi} \cdot d\varphi$,

$\frac{d\varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n}$, $\frac{Cos\, \varphi \cdot d\varphi}{(a + b \cdot Cos\, \varphi)^n}$ u. s. w. f.

Tab. LIII. Die einfachsten Integrale, für den gewöhnlichsten Gebrauch.

1) $\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$;

2) $\int (ax+b)^m \cdot dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a(m+1)}$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \log x$;

4) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \cdot \log(ax+b)$;

5) $\int a^x \cdot dx = \frac{1}{\log a} \cdot a^x$;

6) $\int a^{px+q} \cdot dx = \frac{1}{p \cdot \log a} \cdot a^{px+q}$;

7) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{Tg}\, x$;

8) $\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{b:a}} \int \frac{d(x \cdot \sqrt{b:a})}{1+(x \cdot \sqrt{b:a})^2} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{b:a}} \cdot \frac{1}{Tg}\left(x \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$;

9) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = \log \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; auch $= \log \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$;

10) $\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{b:a}} \int \frac{d(x \cdot \sqrt{b:a})}{1-(x \cdot \sqrt{b:a})^2} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{b:a}} \cdot \log \frac{1+x \cdot \sqrt{b:a}}{1-x \cdot \sqrt{b:a}}$;

11) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \log \frac{x-1}{x+1} = \log \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$; auch $= \log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

12) $\int \frac{dx}{bx^2-a} = -\int \frac{dx}{a-bx^2} = \frac{1}{a \cdot \sqrt{b:a}} \cdot \log \frac{1-x \cdot \sqrt{b:a}}{1+x \cdot \sqrt{b:a}}$;

13) $\int \frac{x \cdot dx}{a \pm bx^2} = \pm \frac{1}{2b} \cdot \log(a \pm bx^2)$;

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{a \pm bx}} = \pm \frac{2}{b} \cdot \sqrt{a \pm bx}$;

15) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a \pm bx}} = \frac{2}{b^2} \cdot \frac{-2a \pm bx}{3} \cdot \sqrt{a \pm bx}$;

16) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a \pm bx}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 \pm bz}}$, wo $x = \frac{1}{z}$,

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \log \frac{\sqrt{a \pm bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a \pm bx} + \sqrt{a}};$$

17) $\int \frac{x \cdot dx}{\sqrt{a \pm bx^2}} = \pm \frac{1}{b} \cdot \sqrt{a \pm bx^2};$

18) $\int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{a \pm bx^2}} = -\int \frac{dz}{\sqrt{az^2 \pm b}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot log \frac{\sqrt{a \pm bx^2} - \sqrt{a}}{x}$, wo $x = \frac{1}{z};$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = log(x + \sqrt{1+x^2});$

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot log(x \cdot \sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2});$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{Sin} x;$ auch $= -\frac{1}{Cos} x;$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{Sin}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$ auch $= -\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{Cos}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right);$

23) $\int Sin\, x \cdot dx = -Cos\, x;$

24) $\int Cos\, x \cdot dx = Sin\, x;$

25) $\int Tg\, x \cdot dx = -log\, Cos\, x;$

26) $\int Cotg\, x \cdot dx = log\, Sin\, x;$

27) $\int Sec\, x \cdot dx = \int \frac{dx}{Cos\, x} = log\, Tg(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x);$

28) $\int Cosec\, x \cdot dx = \int \frac{dx}{Sin\, x} = log\, Tg\, \frac{1}{2}x;$

29) $\int \frac{dx}{a + b \cdot Cos\, x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cdot log \frac{b + a \cdot Cos\, x + \sqrt{b^2 - a^2} \cdot Sin\, x}{a + b \cdot Cos\, x};$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \frac{1}{Cos} \frac{b + a \cdot Cos\, x}{a + b \cdot Cos\, x};$

30) $\int \frac{dx}{1 + Cos\, x} = Tg\, \frac{1}{2}x;$

31) $\int \frac{Sin\, x \cdot dx}{a + b \cdot Cos\, x} = -\frac{1}{b} \cdot log(a + b \cdot Cos\, x);$

32) $\int \frac{Cos\, x \cdot dx}{a + b \cdot Cos\, x} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + b \cdot Cos\, x}.$

Gedruckt bei den Gebr. Unger,
Markgrafenstraße Nr. 51.

Verbesserungen.

Im ersten Theile.

Seite 56, Zeile 15 v. o. lies (vergl. §. 7.) statt (vergl. §. 6.).
— 59, — 21 v. o. l. $(a\cdot b):b = a$ st. $(a\cdot b)b = a$.
— 86, — 4 v. o. l. $b(\alpha E)$ st. $b(aE)$.
— 108, — 21 v. o. l. $a\gamma - a\delta$ st. $\alpha\gamma - a\delta$.
— 109, — 8 v. u. l. $a\alpha + b\alpha$ st. $a\alpha + ba$.
— 124, — 1 v. u. l. $\frac{m}{a} \lessgtr \frac{m}{b}$ st. $\frac{m}{a} \lessgtr \frac{b}{m}$.
— 183, — 3 v. u. l. $p<1$ st. $p>1$.
— 186, — 7 v. u. l. $(a^\alpha:a^\beta)^\delta$ st. $a^\alpha:a^\beta$.
— 262, — 1,4 v. u. l. y st. x.
— — — 3 v. u. l x st. y und b_1c_2d st. b_1cd_2.
— 263, — 1 v. o. l. x st. y.
— — — 5 v. o. l $ab_1d_2 + a_1b_2d + a_2bd_1 - ab_2d_1 - a_2b_1d - a_1bd_2$ st. des dortigen Zählers von z.

Im zweiten Theile.

Seite 6, Zeile 5 v. o. lies $a^{n|d}$ statt $a^{\ d}$.
— 9, — 2 v. u. l. $a(a+d)^{n|d}$ st. $a(a+d)^{n|1}$.
— 23, — 1 v. o. l. $x_n\cdot(x-n)_m$ st. $x\cdot(x-n)_m$.
— 48, — 4,5,6 v. o. statt der letzten $\begin{matrix}2\\0\\0\end{matrix}$ lies $\begin{matrix}223\\010\\100\end{matrix}$
— 59, — 2 v. o. l. $a^{\mathfrak{a}}b^{\mathfrak{b}}$ st. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}^{\mathfrak{b}}$.
— — — 4 v. o. l. $a^4b^{\mathfrak{a}}$ st. a^4b^4.
— — — 15 v. o. l. abwechselnd + und — st. der dortigen + Zeichen.
— 67, — 10 v. u. l. $\mathfrak{a} = \mathfrak{k}+1+\mu$ st. $\mathfrak{b} = \mathfrak{k}+1+\mu$.
— 77, — 15 v. u. l. Aggregat st. Integral.
— 88, — 6 v. o. l. $h_{\mathfrak{b}}\cdot a^{h-\mathfrak{b}|r}$ st. $h_{\mathfrak{b}}\cdot a^{h|r}$.
— 310, — 11—13 v. o. muß überall 32 st. 35 gesetzt werden.
— 324, — 4 v. o. l. $(x-1)^{\mathfrak{a}|-1}$ st. $(x-1)^{\mathfrak{a}-1}$.
— 391, — 2 v. u. l (§. 559.) st. (§. 659.).
— 392, — 5 v. o. l. $\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}=2$ st. $\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}=$.
— — — 15 v. o. l. $\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+\cdots+n\mathfrak{n}=n$ st. $\mathfrak{b}+2\mathfrak{c}+3\mathfrak{d}+\cdots+n\mathfrak{n}=$.
— 395, — 11 v. u. l. §. 663. st. §. 664.

Im dritten Theile.

Seite 35, Zeile 2 v. o. lies $\frac{x \cdot log(1+b)}{1}$ statt $\frac{x \cdot log(1+b)}{2!}$.

— 37, — 4 v. o. l. $[a+(m-1)d]$ st. $[a+(m-1)d]^{n|d}$.

— 49, — 1 v. u. l. 2,71828182 st. 2,718128182.

— 69, — 2 v. o. l. (§. 6. III.) st. (§. 7. III.).

— 76, — 14 v. o. l. $-\frac{nx^m}{(x-a)^{n+1}}$ st. $+\frac{nx^m}{(x-a)^{n+1}}$.

— 80, — 4 v. o. l. $-\frac{x^2+1}{x+1}$ st. $+\frac{x^2+1}{x+1}$.

— 85, — 11 v. o. l. ∂y_x st. ∂y^x.

— 86, — 15 v. o. l. oder y st. oder x.

— 87, — 11 v. o. l. (1.) st. (4.).

— 107, — 18 v. o. l. (§. 11.) st. (§. 10.).

— 120, — 3 v. o. l. $\partial^{1,2}f_{y,x}$ st. $\partial^{1,2}f_{y,z}$.

— 139, — 6 v. o. l. (§. 35.) st. (§. 33.).

— 148, — 9 v. o. l. $-ex$ st. $-cx$.

— 149, — 9 v. u. fehlt der Faktor $\frac{1}{2}$.

— — — 6 v. u. l. $\frac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ st. $x+\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

— 150, — 1 v. o. l. $\sqrt{a^2-x^2}$ st. $\sqrt{a^3-x^2}$.

— 152, — 8 v. o. l. $\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2} \cdot dx$ st. $\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} \cdot dx$.

— 155, — 3 v. u. l. $log(1+\sqrt{1-x^2})$ st. $log(1-\sqrt{1-x^2})$

— 159, — 8 v. o. l. $\partial(\text{arc} \cdot Cos\, x)$ st. $\partial(\text{arc} \cdot Sin\, x)$.

— 163, — 3 v. o. l. $Sin(log\, x)$ st. $Sin\, x(log)$.

— 196, — 13 v. o. fehlt der Faktor 2 im 1sten Gliede $\frac{d^2f}{dx \cdot dz} \cdot dx \cdot dz$.

— 204, — 4 v. u. l. ∂f_x^5 st. ∂x^5.

— 229, — 6 v. o. l. $x^2 \cdot \partial^2 x$ st. $x^2 \cdot \partial^2 y$.

Im vierten Theile.

Seite 15, Zeile 11, 12 v. o. lies a statt 0.

— 140, — 6 v. u. l. β st. b.

— 164, — 11 v. u. l. irrazional st. razional.

— 190, — 1 v. u. } l. überall v+1 st. v−1, dagegen v−1 st. v+1.
— 191, — 1 v. o. }

— 208, — 12 v. o. unter dem Integralzeichen zur Rechten im Nenner l. $(a+b\, Cos\, z)^{n-1}$ st. $(a+b\, Cos\, z)^n$.

Kleinigkeiten, wie z. B. verschiedene Rechtschreibung u. dgl. m. wird derjenige Leser gern entschuldigen, der nur einmal die Korrektur eines solchen Druckbogens selbst besorgt hat.